PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2023

Studijní programy: MAP, MMFP, MSPN, MITPN, MNVP, MPSPN

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Úloha 1 (25 bodů)
Vyšetřete průběh (definiční obor, spojitost, symetrie, limity v krajních bodech, derivaci (včetně jednostranných derivací a případně limit derivací v krajních bodech), monotonii, lokální a globální extrémy, obor hodnot, druhou derivaci, konvexitu, konkavitu, inflexní body, asymptoty a náčrt grafu) funkce definované předpisem

$$f(x) = \begin{cases} -2023\pi, & x = 0, \\ \operatorname{arctg}(\log(x^2)), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Úloha 2 (25 bodů)
Ať $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 3\}$ a $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y^2 \leq 2|x|\}$.
(a) Spočtěte

$$\int_{M \cap N} |x| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

(b) Rozhodněte, zda

$$\int_M e^y \cos x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y < +\infty.$$

Úloha 3 (25 bodů)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je neabsolutně konvergentní řada. V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ rozhodněte o konvergenci (absolutní, neabsolutní, divergenci) následujících řad. Svá rozhodnutí zdůvodněte.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n n^{\beta}}{n^{\alpha}}$.

Úloha 4 (25 bodů)
Uvažujme následující vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ a reálnou matici A_p, která závisí na reálném parametru p.

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & -2p-4 & p+3 \\ -1 & 3p+6 & -p-1 \\ 1 & 0 & p+8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Zjistěte, pro která p je matice A_p regulární.
(b) Pro tato p najděte k matici A_p matici inverzní a
(c) pro stejná p najděte řešení soustavy lineárních rovnic $A_p \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2023

Studijní programy: MAP, MMFP, MSPN, MITPN, MNVP, MPSPN

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (25 bodů)

$D_f = \mathbb{R}$. Protože $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, není f spojitá v 0, tudíž f je spojitá na $D_f \setminus \{0\}$. Snadno rovněž spočteme, že $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, odkud snadno vidíme, že asymptota v $\pm\infty$ je $y = \frac{\pi}{2}$. Funkce je, sudá protože závisí na x^2 (a není lichá ani periodická).

V dalším kroku si spočítáme

$$f'(x) = \frac{2}{x(\log^2(x^2) + 1)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Odtud hned vidíme, že

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$$

a

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0).$$

Funkce je tedy rostoucí na $(0, +\infty)$ (dokonce i na $[0, +\infty)$), a klesající na $(-\infty, 0)$ (dokonce i na $(-\infty, 0]$). Spočteme ještě $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$ a $\lim_{x\to 0\pm} f'(x) = \pm\infty$. Pro určení $f'_\pm(0)$ nemůžeme použít jednostrannou spojitost v 0, ale z definice snadno vidíme, že $f'_\pm(0) = \pm\infty$ (a speciálně, že derivace f v 0 neexistuje). Bod 0 je tedy bodem lokálního i globálního minima, bod lokálního (ani globálního) maxima neexistuje. Obor hodnot je tedy (využíváme spojitost na $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$, monotonii a limity v krajních bodech těchto intervalů) $\{-2023\pi\} \cup (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Dále

$$f''(x) = -\frac{2\left(\log^2\left(x^2\right) + 4\log\left(x^2\right) + 1\right)}{x^2\left(\log^2(x^2) + 1\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Platí tedy

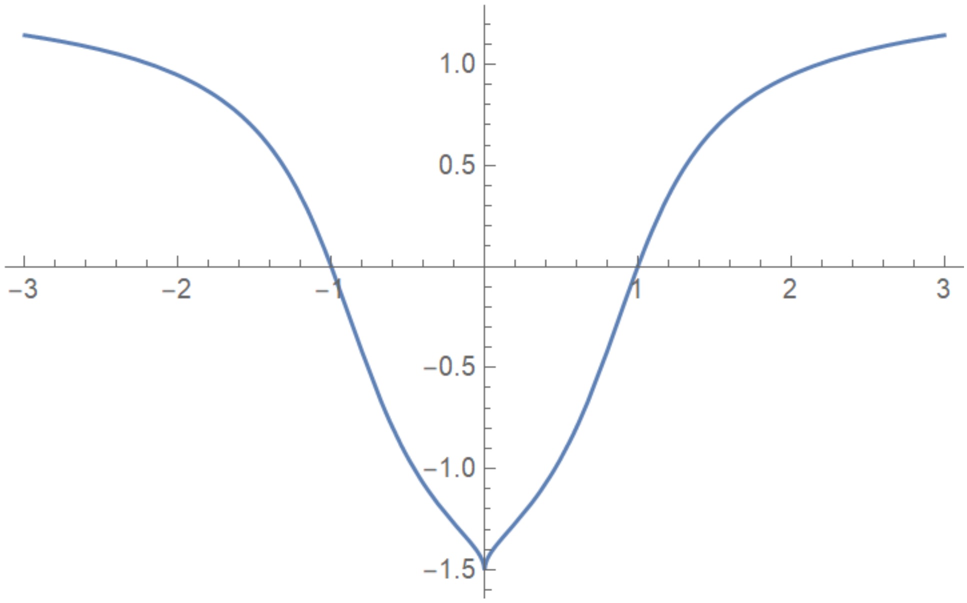
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}, -e^{-1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

$$f'' > 0 \quad \text{na} \quad (-e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, -e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}) \cup (e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}, e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}),$$

$$f'' < 0 \quad \text{na} \quad (-\infty, -e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}) \cup (-e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}, 0) \cup (0, e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}) \cup (e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, +\infty).$$

Funkce je tedy konvexní na $(-e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, -e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}})$ a $(e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}, e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}})$, a konkávní na intervalech $(-\infty, -e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}})$, $(-e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}, 0)$, $(0, e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}})$ a $(e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, +\infty)$. Inflexní body jsou $-e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $-e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ a $e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Na obrázku není pro lepší viditelnost zobrazena hodnota v bodě 0.



Úloha 2 (25 bodů)

(a) Křivky $x^2 + y^2 = 3$ a $y^2 = 2|x|$ se protínají v bodech $(\pm 1, \pm\sqrt{2})$. Využitím symetrie množiny $M \cap N$ a funkce $|x|$ dostáváme

$$\int_{M\cap N} |x| dx dy = 4\int_P x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde $P = M \cap N \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, y \geq 0\}$.

Dále z Fubiniovy věty dostáváme

$$4\int_P x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 4\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} x \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(\left[x^2\right]_{x=\frac{y^2}{2}}^{x=\sqrt{3-y^2}} \right) \mathrm{d}y =$$
$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(3 - y^2 - \frac{y^4}{4}\right) \mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{2}} \left(6 - 2y^2 - \frac{y^4}{2}\right) \mathrm{d}y =$$
$$= \left[6y - \frac{2}{3}y^3 - \frac{y^5}{10}\right]_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(6 - \frac{4}{3} - \frac{2}{5}\right) = \frac{64}{15}\sqrt{2}.$$

(b) Množina M je uzavřená a omezená, tedy kompaktní. Integrovaná funkce je spojitá na M, a proto je omezená. Celkově je tedy uvedený integrál konečný.

Úloha 3 (25 bodů)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ konverguje neabsolutně. Konvergence plyne z aritmetiky řad (součet řad je řada součtů). Řada není absolutně konvergentní neboť z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \big||b_n| - |a_n|\big| \geq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| - |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty.$$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$ konverguje absolutně. Z konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne, že $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Absolutní konvergence pak plyne z limitního srovnávacího kritéria a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{a_n} = 0$.

(c) Pro $\beta \geq \alpha$ máme $\lim_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n n^\beta}{n^\alpha} \neq 0$ a tedy řada diverguje. Nyní předpokládejme, že $\beta < \alpha$ a označme $a_n = n^{-\alpha}$ a $b_n = (-1)^n n^{\beta-\alpha}$. Z Leibnizova kritéria plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. Je známo, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní pro $\alpha > 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je absolutně konvergentní pro $\alpha > \beta + 1$. Z bodu (a) a aritmetiky řad plyne absolutní konvergence pro $\alpha > 1$ a $\alpha > \beta + 1$, konvergence pro $\alpha > 1$ a $\alpha > \beta$ a divergence pro $\alpha \leq 1$.

Úloha 4 (25 bodů)
Gaussovou eliminací upravujeme matici $(A_p|I_3)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2p-4 & p+3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3p+6 & -p-1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & p+8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2p-4 & p+3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p+2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2p+4 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & p+7 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & p+2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3(p+8) & 2(p+8) & -p-7 \\ 0 & p+2 & 0 & 7 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

(a) Matice je regulární právě tehdy, když $p \neq -2$.
(b) Pro $p \neq -2$ dostáváme pronásobením řádků tvar $(I_3|A_p^{-1})$, inverzní matice je tedy

$$A_p^{-1} = \begin{pmatrix} 3(p+8) & 2(p+8) & -p-7 \\ 7/(p+2) & 5/(p+2) & -2/(p+2) \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Pro $p \neq -2$ je jediným řešením soustavy vektor

$$\mathbf{x} = A_p^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p+8 \\ 2/(p+2) \\ -1 \end{pmatrix}.$$