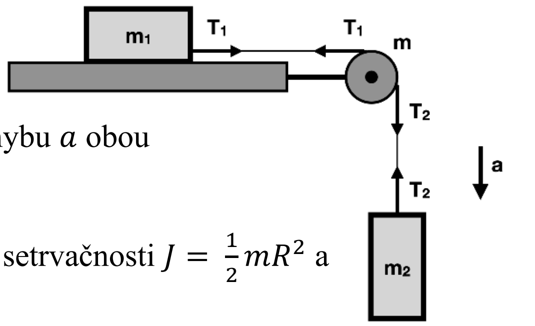
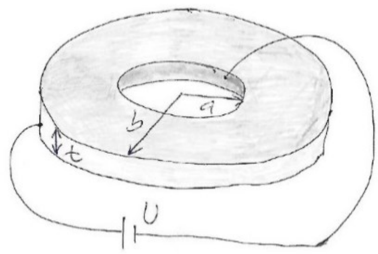
**Přijímací zkouška na navazující magisterské studium - 2023**
**Oblast vzdělávání Fyzika, kromě Učitelství fyziky pro střední školy se sdruženým studiem Učitelství matematiky pro střední školy (FMUPN), Varianta A**

**Příklad 1 (25 bodů)**



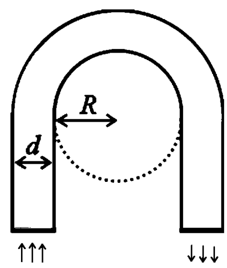

Těleso o hmotnosti $m_1$ je umístěno na vodorovné podložce a je připevněno vláknem k volně visícímu tělesu o hmotnosti $m_2$ přes kladku (viz. obrázek). Koeficient smykového tření prvního tělesa o podložku je $\mu$. Určete velikost zrychlení pohybu $a$ obou těles a tahové síly $T_1$ a $T_2$ ve vlákně v případě, že kladka je
a) nehmotná,
b) hmotná (plný homogenní disk o poloměru $R$ s momentem setrvačnosti $J = \frac{1}{2}mR^2$ a hmotností $m$).
Zanedbejte hmotnost vlákna a tření kladky při otáčení.

**Příklad 2 (25 bodů)**



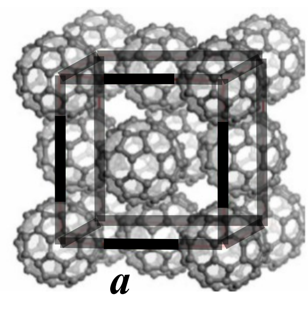

Prostor mezi dvěma kovovými elektrodami tvořícími plášť válce o poloměru $a$ a $b$ ($a < b$) a výšce $t$ je vyplněn materiálem o měrné vodivosti $\gamma$. Mezi elektrodami je udržováno konstantní napětí $U$. Vypočtěte odpor $R$ materiálu mezi elektrodami a vyjádřete ho pomocí veličin $a$, $b$, $t$ a vodivosti $\gamma$. Využijte k tomu
a) výrazu definujícího odpor vodiče na základě jeho vodivosti, průřezu a délky;
b) Ohmova zákona. V tomto případě je výhodné vyjádřit napětí a proud pomocí intenzity elektrického pole v materiálu mezi elektrodami. Nehomogenity elektrického pole na okrajích elektrod považujte za zanedbatelné.

**Příklad 3 (25 bodů)**



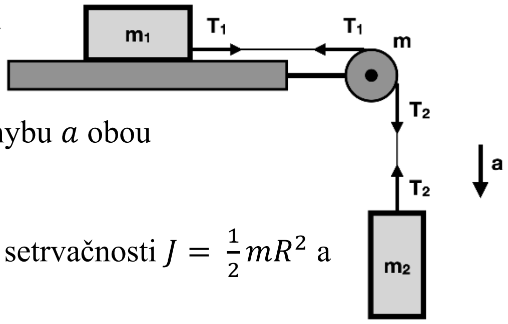

Skleněná optická tyč čtvercového průřezu je ohnuta do „podkovy“ (viz obrázek). Vnitřní prohnutí je kruhové s poloměrem $R$, vnější prohnutí je také kruhové s poloměrem $R+d$. Index lomu skla je $n_s = 1{,}5$. Svazek rovnoběžných paprsků světla dopadá kolmo na vstupní plochu. Určete minimální hodnotu podílu $R/d$, aby veškeré světlo, které vstoupilo do tyče, se dostalo na konec tyče, na výstupní plochu. Jak se hodnota podílu změní, obklopíme-li tyč vodou s indexem lomu $n_v = 4/3$? Řešte i číselně.

**Příklad 4 (25 bodů)**
Fulleren za určitých podmínek (nízké teploty) tvoří pravidelně uspořádanou krystalovou strukturu, kterou lze popsat plošně centrovanou mříží s molekulou $C_{60}$ coby strukturní jednotkou. Mřížový parametr byl změřen jako $a = 14{,}052$ Å. Stanovte




a) Hustotu této modifikace fullerenu - $\rho$.
b) Vzdálenost mezi rovinami procházejícími stěnovými úhlopříčkami elementární buňky, tj. rovinami kolmými na vektor (110) - $d_{110}$.
c) Krystalovou strukturu je možné studovat vedle rtg. záření též s využitím rozptylu neutronů. K určení mřížové konstanty je třeba zvolit neutron s odpovídajícími vlastnostmi. Která volba rychlosti neutronu bude pro takový difrakční experiment vhodnější: $v_1 = 1000$ m.s$^{-1}$ nebo $v_2 = 10\,000$ m.s$^{-1}$?
*(Užitečné konstanty:* Ar (C) = 12,0; $m_u \cong m_n = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg; $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J.s
*Řešte nejprve obecně. Číselná vyjádření stačí vhodně zaokrouhlit.)*

**Příklad 1**



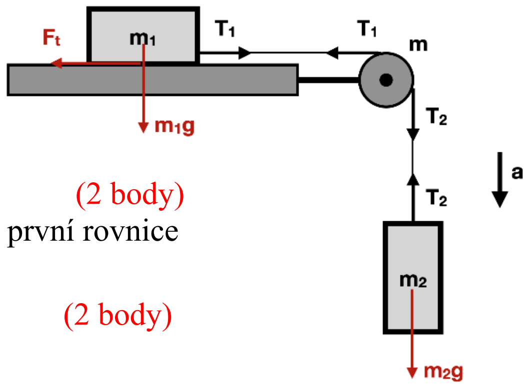

Těleso o hmotnosti $m_1$ je umístěno na vodorovné podložce a je připevněno vláknem k volně visícímu tělesu o hmotnosti $m_2$ přes kladku (viz. obrázek). Koeficient smykového tření prvního tělesa o podložku je $\mu$. Určete velikost zrychlení pohybu $a$ obou těles a tahové síly $T_1$ a $T_2$ ve vlákně v případě, že kladka je

a) nehmotná,

b) hmotná (plný homogenní disk o poloměru $R$ s momentem setrvačnosti $J = \frac{1}{2}mR^2$ a hmotností $m$).

Zanedbejte hmotnost vlákna a tření kladky při otáčení.

**Řešení:**




a) V případě nehmotné kladky platí $T_1=T_2$. Pohybové rovnice pro tělesa jsou tedy následující

$$m_1 a = T_1 - F_t, \quad \text{(2 body)}$$
$$m_2 a = m_2 g - T_1, \quad \text{(2 body)}$$

kde

$$F_t = \mu m_1 g. \quad \text{(2 body)}$$

Jedná se o dvě rovnice pro dvě neznámé. Vyjádřením $T_1$ z první rovnice a dosazením do druhé dostáváme pro zrychlení

$$a = \frac{g(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2}. \quad \text{(2 body)}$$

Dosazením do druhé rovnice získáme

$$T_1 = m_2 g \left(1 - \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2}\right). \quad \text{(2 body)}$$

b) V tomto případě $T_1 \neq T_2$ a pohybové rovnice jsou

$$m_1 a = T_1 - F_t, \quad \text{(2 body)}$$
$$m_2 a = m_2 g - T_2, \quad \text{(2 body)}$$

kde $F_t = \mu m_1 g$ Pro hmotnou kladku dále platí

$$\frac{dL}{dt} = M, \quad \text{(2 body)}$$

kde moment hybnosti je dán vztahem

$$L = J\omega, \quad \text{(2 body)}$$

a moment síly vztahem

$$M = FR. \quad \text{(1 bod)}$$

Platí tedy

$$J\frac{d\omega}{dt} = M = J\varepsilon, \quad \text{(1 bod)}$$

kde

$$\varepsilon = \frac{a}{R} \quad \text{(1 bod)}$$

je úhlové zrychlení. Dostáváme tedy tři rovnice pro tři neznámé

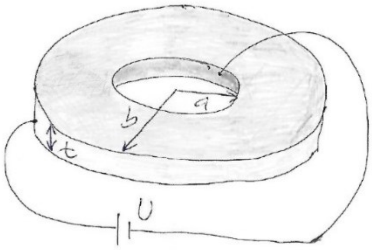
$$T_1 = m_1(\mu g + a),$$
$$T_2 = m_2(g - a),$$
$$2(T_2 - T_1) = ma. \quad \text{(2 body)}$$

Vyřešením dostaneme

$$a = \frac{2g(m_2 - \mu m_1)}{2m_1 + 2m_2 + m}. \quad \text{(2 body)}$$

Velikosti $T_1$ a $T_2$ dostaneme dosazením a do prvních dvou rovnic. Dosazením za m=0 (nehmotná kladka) dostaneme řešení z části a).

**Příklad 2**




Prostor mezi dvěma kovovými elektrodami tvořícími plášť válce o poloměru $a$ a $b$ ($a < b$) a výšce $t$ je vyplněn materiálem o měrné vodivosti $\gamma$. Mezi elektrodami je udržováno konstantní napětí $U$. Vypočtěte odpor $R$ materiálu mezi elektrodami a vyjádřete ho pomocí veličin $a$, $b$, $t$ a vodivosti $\gamma$. Využijte k tomu

a) výrazu definujícího odpor vodiče na základě jeho vodivosti, průřezu a délky;

b) Ohmova zákona. V tomto případě je výhodné vyjádřit napětí a proud pomocí intenzity elektrického pole v materiálu mezi elektrodami. Nehomogenity elektrického pole na okrajích elektrod považujte za zanedbatelné.

**Řešení:**

a) Odpor lze vyjádřit vztahem

$$R = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S} \qquad \text{(2 body)}$$

kde $L$ je délka vodiče a $S$ je plocha, kterou proud protéká. V našem případě celkový odpor spočteme díky symetrii problému integrací přes válcové vrstvy o poloměru $r$ kde $a<r<b$:

$$dR = \frac{dL}{\gamma S(r)} \quad => \quad R = \int_a^b \frac{1}{\gamma}\frac{dr}{2\pi r t} = \frac{\ln\frac{b}{a}}{2\pi\gamma t} = \frac{\ln b - \ln a}{2\pi\gamma t} \qquad \text{(5 bodů)}$$

b) Odpor lze vyjádřit také pomocí Ohmova zákona

$$R = \frac{U}{I} \qquad \text{(2 body)}$$

který lze v diferenciálním tvaru zapsat jako

$$\vec{i} = \gamma\vec{E} \qquad \text{(2 body)}$$

Z posledního vztahu vyplývá, že vektory proudové hustoty $\vec{i}$ a elektrické intenzity $\vec{E}$ mají stejný směr. Za podmínek příkladu (stacionární elektrické pole) bude mezi elektrodami protékat proud $I$, jehož hodnota je konstantní, ale proudová hustota $i$ a intenzita $E$ jsou funkcí vzdálenosti $r$ od osy válců ($a<r<b$). S využitím těchto faktů a symetrie problému můžeme celkový proud vyjádřit jako

$$I = \int \vec{i}\cdot d\vec{S} = i(r)S(r) = \gamma\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \gamma E(r)S(r) = \gamma E(r)2\pi r t \qquad \text{(5 bodů)}$$

Pro velikost intenzity elektrického pole mezi elektrodami z posledního vztahu dostáváme

$$E(r) = \frac{I}{2\pi\gamma r t} \qquad \text{(2 body)}$$

Napětí můžeme vyjádřit také pomocí intenzity jako

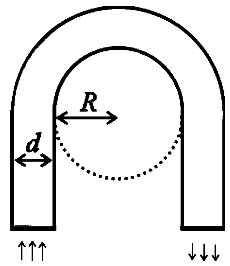
$$U = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_a^b E(r)dr = \int_a^b \frac{I dr}{2\pi\gamma r t} = \frac{I}{2\pi\gamma t}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{I\ln\frac{b}{a}}{2\pi\gamma t} = \frac{I(\ln b - \ln a)}{2\pi\gamma t} \qquad \text{(5 bodů)}$$

a pro odpor $R$ dostáváme

$$R = \frac{U}{I} = \frac{I(\ln b - \ln a)}{I 2\pi\gamma t} = \frac{\ln b - \ln a}{2\pi\gamma t} \qquad \text{(2 body)}$$

Příklad lze řešit také s využitím totožnosti rovnic popisujících stacionární elektrické a elektrostatické pole a velikost intenzity $E$ spočíst s využitím Gaussova zákona.

**Příklad 3**




Skleněná optická tyč čtvercového průřezu je ohnuta do „podkovy“ (viz obrázek). Vnitřní prohnutí je kruhové s poloměrem $R$, vnější prohnutí je také kruhové s poloměrem $R+d$. Index lomu skla je $n_s = 1{,}5$. Svazek rovnoběžných paprsků světla dopadá kolmo na vstupní plochu. Určete minimální hodnotu podílu $R/d$, aby veškeré světlo, které vstoupilo do tyče, se dostalo na konec tyče, na výstupní plochu. Jak se hodnota podílu změní, obklopíme-li tyč vodou s indexem lomu $n_v = 4/3$? Řešte i číselně.

**Řešení:**

Aby se všechny paprsky dostaly na konec tyče, musejí se totálně odrážet na rozhraní sklo – vzduch. (3 body)

Pro úhel dopadu $\alpha$ na rozhraní proto musí platit:

$$\alpha > \alpha_m, \qquad \text{(2 body)}$$

kde $\alpha_m$ je mezní úhel definovaný jako (sklo má index lomu $n_s$, okolí $n_0$)

$$\sin\alpha_m = \frac{n_o}{n_s}. \qquad \text{(2 body)}$$

Není potřeba počítat mezní úhly pro všechny paprsky. Stačí pro nejvnitřnější, protože ostatní paprsky dopadají na rozhraní pod větším úhlem. To znamená, pokud bude splněna podmínka totálního odrazu pro nejvnitřnější paprsek, bude splněna i pro všechny ostatní. (2 body)

Navíc, daný paprsek má stejný úhel dopadu při všech svých odrazech, protože rozhraní je kruhové. (2 body)

Úhel dopadu $\alpha$ pro nejvnitřnější paprsek vypočítáme z pravoúhlého trojúhelníku

$$\sin\alpha = \frac{R}{R+d}. \qquad \text{(3 body)}$$

Pro nejmenší úhel dopadu, kdy nastane totální odraz, tudíž platí

$$\sin\alpha = \frac{R}{R+d} = \frac{n_o}{n_s}. \qquad \text{(2 body)}$$

Pro výpočet minimální hodnoty podílu $R/d$ např. rozšíříme zlomek $R/R+d$ členem $1/d$ a úpravou dostaneme

$$\frac{R}{R+d} = \frac{\frac{R}{d}}{\frac{R}{d}+1} = \frac{n_o}{n_s},$$

$$\frac{R}{d} = \frac{1}{\frac{n_s}{n_0}-1}. \qquad \text{(3 body)}$$

Dosadíme index lomu skla $n_s = 1{,}5$ a okolního vzduchu $n_0$, dostaneme

$$\frac{R}{d} = 2, \text{ resp. } \frac{R}{d} > 2. \qquad \text{(3 body)}$$

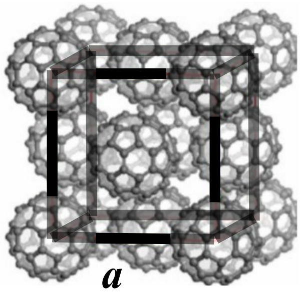
Takže, aby docházelo u všech paprsků k totálnímu odrazu, musí být poměr $R/d$ větší než 2.

Pokud je okolní prostředí voda, dosadíme za $n_0 = 4/3$ a získáme minimální hodnotu poměru

$$\frac{R}{d} = 8. \qquad \text{(3 body)}$$

**Příklad 4**

Fulleren za určitých podmínek (nízké teploty) tvoří pravidelně uspořádanou krystalovou strukturu, kterou lze popsat plošně centrovanou mříží s molekulou $C_{60}$ coby strukturní jednotkou. Mřížový parametr byl změřen jako $a$ = 14,052 Å. Stanovte




a) Hustotu této modifikace fullerenu - $\rho$ .

b) Vzdálenost mezi rovinami procházejícími stěnovými úhlopříčkami elementární buňky, tj. rovinami kolmými na vektor (110) - $d_{110}$ .

c) Krystalovou strukturu je možné studovat vedle rtg. záření též s využitím rozptylu neutronů. K určení mřížové konstanty je třeba zvolit neutron s odpovídajícími vlastnostmi. Která volba rychlosti neutronu bude pro takový difrakční experiment vhodnější: $v_1 = 1000\ \mathrm{m.s^{-1}}$ nebo $v_2 = 10\ 000\ \mathrm{m.s^{-1}}$?

(*Užitečné konstanty:* Ar (C) = 12,0; $m_u \cong m_n = 1{,}66 \ .\ 10^{-27}$ kg; h = 6,6 . $10^{-34}$ J.s
*Řešte nejprve obecně. Číselná vyjádření stačí vhodně zaokrouhlit.)*

**Řešení:**

<u>*Známé a neznámé:*</u>

Kubická mříž FCC ⇒ počet strukturních jednotek v elementární buňce N = 4 (2 body)

$a$ = 14,052 Å = 1,405 . $10^{-9}$m (1 bod)

strukturní jednotka 60 x atom C (1 bod)

a) $\rho = ?$
b) $d_{110} = ?$
c) pro difrakci je vhodnější λ bližší studovanému rozměru - tj. λ ($v_1$) nebo λ ($v_2$) ? (2 body)

a) $\rho = \frac{N \cdot 60 \cdot m(\mathrm{C})}{a^3} = \frac{N \cdot 60 \cdot m_u \cdot Ar(\mathrm{C})}{a^3}$ (2 body)

tedy

$$\rho = \frac{4 \cdot 60 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-27} \cdot 12}{1{,}4^3 \cdot 10^{-27}} \mathrm{kg.m^{-3}} = \frac{4\ .60\ .20}{2{,}8} \mathrm{kg.m^{-3}} \cong 2000\ \mathrm{kg.m^{-3}}\ .$$ (2 body)

(přesná hodnota je 1720 kg.m$^{-3}$)

b) $d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$ ; tedy $d_{110} = \frac{14{,}052}{\sqrt{2}}$ Å $\cong 10$ Å (4+2 body)

(alternativně lze akceptovat i geometrickou rozvahu – byť časově náročnější)

c) Pro výpočet rychlosti neutronu využijeme de-Broglieho vztah

$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_n v}$ (4 body)

číselně:

$\lambda\ (v_1) = \frac{6{,}6\ .\ 10^{-34}}{1{,}66\ .\ 10^{-27}\ .\ 10^3}\ \mathrm{m} = \frac{4\ .\ 10^{-34}}{10^{-24}}\ \mathrm{m} = 4\ .10^{-10}\ \mathrm{m} = 4$ Å (2 body)

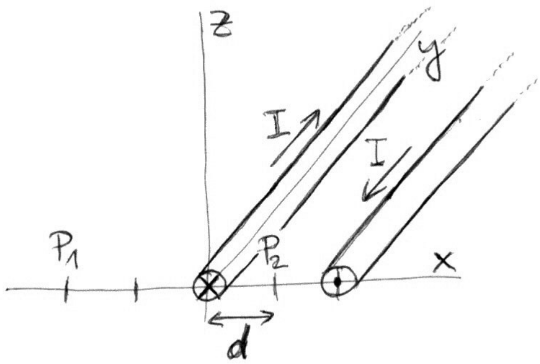
$\lambda\ (v_2) = \frac{6{,}6\ .\ 10^{-34}}{1{,}66\ .\ 10^{-27}\ .\ 10^4}\ \mathrm{m} = \frac{4\ .\ 10^{-34}}{10^{-23}}\ \mathrm{m} = 4\ .10^{-11}\ \mathrm{m} = 0{,}4$ Å (2 body)

Bližší mřížovému parametru a je vlnová délka 4 Å, tj. vhodnější je neutron o rychlosti $v_1$. (1 bod)

**Přijímací zkouška na navazující magisterské studium - 2023**
**Oblast vzdělávání Fyzika, kromě Učitelství fyziky pro střední školy se sdruženým studiem Učitelství matematiky pro střední školy (FMUPN), Varianta B**

**Příklad 1 (25 bodů)**
Sáňky jedoucí ze zasněženého kopce se sklonem $\alpha$ se po zdolání výškového rozdílu $h$ zastaví na stejně zasněžené rovině ve vzdálenosti $l$ od úpatí kopce. Vypočítejte koeficient tření $f$ sáněk na sněhu.

**Příklad 2 (25 bodů)**
Dvěma velmi dlouhými, přímými a rovnoběžnými vodiči o zanedbatelném poloměru teče proud $I$ o stejné velikosti, ale opačného směru. Vzdálenost mezi vodiči je $2d$.
a) Určete velikost a směr vektoru magnetické indukce $\vec{B}$ v bodech (viz obr.) $P_1$=(-2$d$, 0, 0) a $P_2$=($d$, 0, 0).
b) Určete velikost a směr síly $\vec{F}$ působící mezi vodiči a připadající na jednotku jejich délky.
c) Jaká je vlastní indukčnost $L$ připadající na jednotku délky obou vodičů? Paralelní vodiče, kterými teče proud o stejné velikosti, ale opačného směru, můžete považovat za nekonečnou smyčku. Tok vektoru magnetické indukce vnitřkem vodičů považujte za zanedbatelný. Při integraci uvažujte nenulový poloměr obou vodičů $r$.




**Příklad 3 (25 bodů)**
Výstupní práce elektronu u Ce při vnějším fotoefektu je $A$ = 2,0 eV.
a) Spočítejte červený práh, tj. maximální vlnovou délku $\lambda_{max}$ fotonu, který je schopen uvolnit z kovu elektron. Počítejte na jednu platnou číslici (h = 6,6.10$^{-34}$ Js, 1 eV = 1,6.10$^{-19}$ J).
b) Jak velké jsou rychlosti $v$ uvolněných elektronů, dopadá-li na Ce záření o vlnové délce $\lambda$ ($\lambda < \lambda_{max}$)? Počítejte obecně.
c) Určete impuls $p$ udělený elektrodě fotonem o vlnové délce $\lambda$ ($\lambda < \lambda_{max}$), jestliže vyražený elektron vyletuje stejným směrem jako dopadající foton. Počítejte obecně.

**Příklad 4 (25 bodů)**
Měď krystalizuje v plošně centrované mříži s mřížovým parametrem $a$ = 0.36 nm, tzn. atomy mědi jsou v polohách 0 0 0, $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0$, $\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}$ a $0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$.
Můžeme při použití rentgenového záření s vlnovou délkou 0.12 nm pozorovat difrakční maximum při úhlu θ=30°? Vysvětlete proč (lze bez použití kalkulačky).
Pro usnadnění výpočtu připomínáme vztah pro strukturní faktor:

$$F_{hkl} = \sum_n f_n \, e^{2\pi i(hx_n + ky_n + lz_n)}$$

**Příklad 1**

Sáňky jedoucí ze zasněženého kopce se sklonem $\alpha$ se po zdolání výškového rozdílu $h$ zastaví na stejně zasněžené rovině ve vzdálenosti $l$ od úpatí kopce. Vypočítejte koeficient tření $f$ sáněk na sněhu.

**Řešení:**

K vyřešení příkladu využijeme energetické bilance sáněk. Přírůstek kinetické energie sáněk po dojetí k úpatí kopce je roven práci vykonané vnějšími silami na sáňky.

Celková síla působící na sáňky na kopci je rozdíl složky tíhové síly rovnoběžné se svahem a třecí síly, která působí proti směru pohyby sáněk. Čili

$$\vec{F} = \vec{G} sin\alpha - \vec{G} f cos\alpha.$$

(5 bodů)

Velikost celkové síly je tedy

$$F = mgsin\alpha - mgfcos\alpha.$$

Pro výpočet práce musíme znát vzdálenost na které působí síla. Z jednoduchého trojúhelníku si můžeme vzdálenost od začátku pohybu sáněk k úpatí kopce vyjádřit jako

$$s = \frac{h}{sin\alpha}.$$

Po dosazení dostaneme přírůstek kinetické energie sáněk

$$A = Fs = \Delta E_K = mgh - mghf\frac{cos\alpha}{sin\alpha}.$$

(5 bodů)

Úbytek kinetické energie na rovném úseku ve vzdálenosti $l$ od úpatí kopce, kde na sáňky působí pouze třecí síla proti směru jejich pohybu můžeme napsat jako

$$\Delta E_K = mgfl.$$

(5 bodů)

Aby se sáňky zastavily, musí se být přírůstek kinetické energie na úpatí kopce být roven úbytku kinetické energie ve vzdálenosti $l$ od úpatí. Z toho plyne

$$mgfl = mgh - mgh\frac{f}{tg\alpha}.$$

(5 bodů)

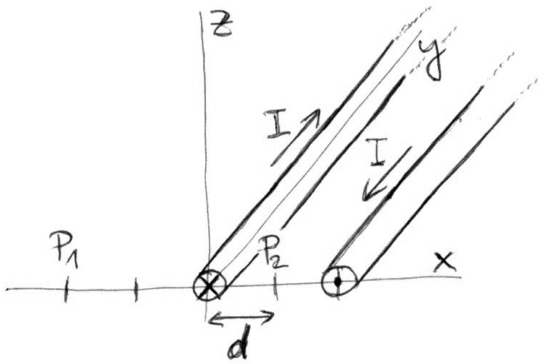
Z této rovnice jednoduše vyjádříme výsledný výraz pro tření sáněk na sněhu

$$f = \frac{htg\alpha}{(ltg\alpha + h)}.$$

(5 bodů)

**Příklad 2**

Dvěma velmi dlouhými, přímými a rovnoběžnými vodiči o zanedbatelném poloměru teče proud $I$ o stejné velikosti, ale opačného směru. Vzdálenost mezi vodiči je $2d$.




a) Určete velikost a směr vektoru magnetické indukce $\vec{B}$ v bodech (viz obr.) $P_1$=(-2$d$, 0, 0) a $P_2$=($d$, 0, 0).

b) Určete velikost a směr síly $\vec{F}$ působící mezi vodiči a připadající na jednotku jejich délky.

c) Jaká je vlastní indukčnost $L$ připadající na jednotku délky obou vodičů? Paralelní vodiče, kterými teče proud o stejné velikosti, ale opačného směru, můžete považovat za nekonečnou smyčku. Tok vektoru magnetické indukce vnitřkem vodičů považujte za zanedbatelný. Při integraci uvažujte nenulový poloměr obou vodičů $r$.

**Řešení:**

a) Pro výpočet magnetického pole dlouhým, přímým vodiči můžeme použít Ampérův zákon $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I$. Zvolíme-li jako integrační křivku kružnici kolmou na vodič a o poloměru $R$ zvoleném tak, aby procházela bodem, ve kterém nás magnetické pole zajímá, dostáváme

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \qquad \text{(5 bodů)}$$

Podle pravidla pravé ruky má magnetické pole obou vodičů v bodech $P_1$ a $P_2$ nenulovou pouze z-ovou komponetu. Orientace magnetického pole obou vodičů je v bodu 1 opačná:

$$B(P_1) = \left(0{,}0, \frac{\mu_0 I}{4\pi d} - \frac{\mu_0 I}{8\pi d} = \frac{\mu_0 I}{8\pi d}\right)$$

a v bodu $P_2$ shodná

$$B(P_2) = \left(0{,}0, -\frac{\mu_0 I}{2\pi d} - \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = -\frac{\mu_0 I}{\pi d}\right) \qquad \text{(5 bodů)}$$

b) Vyjdeme ze vztahu pro Lorentzovu sílu

$$\vec{F} = Q[\vec{v} \times \vec{B}] = Q[\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} \times \vec{B}] = \frac{\partial Q}{\partial t}[\vec{l} \times \vec{B}] = I[\vec{l} \times \vec{B}]$$

ze kterého vyplývá, že se vodiče v případě opačně tekoucích proudů odpuzují silou, jejíž velikost na jednotku délky je

$$F = IB\sin\alpha = I_1 B_2 = I_2 B_1 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi d} \qquad \text{(5 bodů)}$$

c) Indukčnost smyčky je definována vztahem $\Phi = LI$ mezi magnetickým tokem $\Phi$ plochou smyčky a proudem $I$ smyčkou, který tento tok působí. Magnetický tok plochou mezi vodiči na délce $l$ způsobený proudem jednoho vodiče lze zapsat

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int \frac{1}{r} dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_r^{2d-r} \frac{l}{r} dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln|r|_r^{2d-r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left|\frac{2d-r}{r}\right|$$

a tedy tok dvěma vodiči povede k indukčnosti na jednotku délky $L = \dfrac{\mu_0}{\pi} \ln\left|\dfrac{2d-r}{r}\right|$ (10 bodů)

**Příklad 3**

Výstupní práce elektronu u Ce při vnějším fotoefektu je $A$ = 2,0 eV.
a) Spočítejte červený práh, tj. maximální vlnovou délku $\lambda_{max}$ fotonu, který je schopen uvolnit z kovu elektron. Počítejte na jednu platnou číslici (h = 6,6.10$^{-34}$ Js, 1 eV = 1,6.10$^{-19}$ J).
b) Jak velké jsou rychlosti $v$ uvolněných elektronů, dopadá-li na Ce záření o vlnové délce $\lambda$ ($\lambda < \lambda_{max}$)? Počítejte obecně.
c) Určete impuls $p$ udělený elektrodě fotonem o vlnové délce $\lambda$ ($\lambda < \lambda_{max}$), jestliže vyražený elektron vyletuje stejným směrem jako dopadající foton. Počítejte obecně.

**Řešení:**

a) Minimální energie fotonu, která uvolní z kovu elektron, je rovna výstupní práci

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda_{max}} = A$$

z toho získáme $\lambda_{max} \approx 600$ nm. (7 bodů)

b) Kinetická energie uvolňovaných elektronů je

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{hc}{\lambda} - A$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)}$$

(8 bodů)

c) Vyjdeme ze zákona zachování hybnosti

$$\frac{h}{\lambda} = p + mv$$

dosadíme rychlost $v$ z rovnice v části řešení b) a vyjádříme $p$

$$p = \frac{h}{\lambda} - \sqrt{2\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)m}$$

(10 bodů)

**Příklad 4**

Měď krystalizuje v plošně centrované mříži s mřížovým parametrem $a$ = 0.36 nm, tzn. atomy mědi jsou v polohách 0 0 0, $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$ 0, $\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$ a 0 $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$.

Můžeme při použití rentgenového záření s vlnovou délkou 0.12 nm pozorovat difrakční maximum při úhlu θ=30°? Vysvětlete proč (lze bez použití kalkulačky).

Pro usnadnění výpočtu připomínáme vztah pro strukturní faktor:

$$F_{hkl} = \sum_n f_n\, e^{2\pi i(hx_n + ky_n + lz_n)}$$

**Řešení:**

S použitím vztahu pro mezirovinné vzdálenosti kubické mříže a Braggova zákona vyjádříme, že $h^2+k^2+l^2 = 9$, což nám dává možnost $hkl$ 003, nebo 122 (a jejich permutace) (5 bodů).

$d_{hkl} = \frac{2\pi}{|\vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{hkl}}|} = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$ (kdo si nepamauje, odvodí z definice $B_{\mathrm{hkl}}$) (5 bodů)

Braggův zákon: $2d_{hkl}\sin\theta = \lambda$ (5 bodů)

Tímto však příklad nekončí! Je třeba ověřit, zda nalezené reflexe nevyhasínají. Vypočteme tedy strukturní faktor $F_{\mathrm{hkl}}$. Pro intenzitu difraktovaného záření platí úměrnost $I \cong |F_{hkl}|^2$, kde $F_{hkl}$ je strukturní faktor daný vztahem:

$$F_{hkl} = \sum_n f_n\, e^{2\pi i(hx_n + ky_n + lz_n)}$$

frakční souřadnice jsou zadané, tedy dosadíme a dostaneme rovnici:

$F_{hkl} = f_{Cu}(e^0 + e^{\pi i(h+k)} + e^{\pi i(h+l)} + e^{\pi i(k+l)})$ (5 bodů)

z čehož plyne:

$F_{hkl} = 4f_{\mathrm{Cu}}$ pro $hkl$ všechna sudá nebo všechna lichá

$F_{hkl} = 0$ pro $hkl$ smíšená

Reflexe 003 a 122 tedy vyhasínají a v difrakčním záznamu nebudou. (5 bodů)