Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2017

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MA, MMIT, MMFT, MSTR, MNVM, MPMSE

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Příklad 1 (25 bodů)

Nechť

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos(x)}{x^4} && : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ x_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^3+k}} && : n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(a) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(b) Spočtěte $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(c) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Vysvětlete svá řešení.

Příklad 2 (25 bodů)

Nechť

$$\begin{aligned} N &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 < 3z\}, \\ B^+ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 < 4 \quad \& \quad z > 0\}, \\ B^- &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 < 4 \quad \& \quad z < 0\}, \\ B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 < 4\}. \end{aligned}$$

Pomocí válcových souřadnic spočtěte následující integrály:

(a) $\int_{B^+\setminus N} d\lambda$,

(b) $\int_{B^-\setminus N} d\lambda$,

(c) $\int_{B\setminus N} d\lambda$.

Příklad 3 (25 bodů)

Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

(a) Spočtěte $f'(0)$.

(b) Rozhodněte, zda existuje $a > 0$ takové, že f je monotóní na intervalu $(-a, a)$.

(c) Rozhodněte, zda existuje $b < 0$ takové, že f je konvexní na intervalu $(-\infty, b)$.

Své odpovědi zdůvodněte.

Příklad 4 (25 bodů)

Uvažujme následující reálnou matici A_p (která závisí na reálném parametru $p \in \mathbb{R}$) a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & p+2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Pro každé $p \in \mathbb{R}$

- najděte nějakou bázi prostoru všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic $A_p\mathbf{x} = \mathbf{o}$ a
- určete množinu všech řešení soustavy lineárních rovnic $A_p\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2017

Studijní program: Matematika

Studijní obory: MA, MMIT, MMFT, MSTR, MNVM, MPMSE

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

(a) Použijeme větu o dvou policistech. Víme, že

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}, \ k \in \{1, \dots, n\}.$$

Pak

$$0 \leq x_n \leq \frac{n+1}{\sqrt{n^3}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

(b) Použijeme Taylorovy polynomy funkcí $e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\cos(x)$ a $f(x)$. Pak dostaneme

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{8} + o(x^4), \\ \cos(x) &= 1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24} + o(x^4), \\ f(x) &= \tfrac{1}{12} + o(1). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{12}.$$

(c) Použijeme Heineho větu. Lze snadno nahlédnout, že $x_n \neq 0$ pro $n \in \mathbb{N}$. Z (a) a (b) pak plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{1}{12}.$$

Příklad 2 (25 bodů)

Válcové souřadnice jsou:

$$\begin{aligned} x =& \quad r\cos(\alpha), \\ y =& \quad r\sin(\alpha), \quad r > 0,\ \alpha \in (0, 2\pi),\ z \in \mathbb{R}, \\ z =& \qquad z. \end{aligned} \tag{1}$$

Jacobián válcových souřadnic je r.

(a) Platí, že $B^+ \setminus N = \{(r, \alpha, z) \in \mathbb{R}^3 : z, r > 0, r^2 < 4 - z^2, r^2 \geq 3z, \alpha \in (0, 2\pi)\} \cup M$, kde $\lambda(M) = 0$. Nerovnosti $3z < 4 - z^2$, $z > 0$ platí pro $z \in (0, 1)$, tedy

$$\begin{aligned} \int_{B^+\setminus N} d\lambda =& \quad \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{3z}}^{\sqrt{4-z^2}} r dr dz d\alpha \\ =& \quad \pi\int_0^1 (4 - z^2 - 3z) dz \\ =& \quad \pi\left[4z - \frac{1}{3}z^3 - \frac{3}{2}z^2\right]_{z=0}^1 \\ =& \quad \frac{13}{6}\pi. \end{aligned} \tag{2}$$

(b) Máme $B^- \setminus N = B^-$, tedy

$$\begin{aligned} \int_{B^-\setminus N} d\lambda = \int_{B^-} d\lambda & \quad \int_0^{2\pi}\int_{-2}^0\int_0^{\sqrt{4-z^2}} r dr dz d\alpha \\ =& \quad \pi\int_{-2}^0 4 - z^2 dz = 2\pi\left[4z - \frac{1}{3}z^3\right]_{z=-2}^0 \\ =& \quad \frac{16}{3}\pi. \end{aligned} \tag{3}$$

(c)

$$\begin{aligned} \int_{B\setminus N} d\lambda =& \quad \int_{B^+\setminus N} d\lambda + \int_{B^-\setminus N} d\lambda \\ =& \quad \frac{45}{6}\pi. \end{aligned} \tag{4}$$

Příklad 3 (25 bodů)

(a)
$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0,$$

kde poslední rovnost plyne z faktu, že cos je omezená funkce a h konverguje k 0.

(b) Ne. Dokážeme to sporem. Nechť $a > 0$ je takové, že f je monotóní na $(-a, a)$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $2n\pi > \frac{1}{a}$. Položme $y = \frac{1}{2n\pi}$ a $z = \frac{1}{(2n+1)\pi}$. Očividně, $-a < 0 < z < y < a$ a $f(z) = -z^2 < f(0) = 0 < f(y) = y^2$. Tedy, f není monotóní na $(-a, a)$.

(c) Ano. Zřejmě,

$$f''(x) = 2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) : \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Protože cos je spojitý v 0 a $\cos(0) = 1$, snadno dostaneme, že

$$\lim_{x \to -\infty} f''(x) = 2 > 0.$$

Tedy existuje $b < 0$ takové, že $f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, b)$. Z toho již snadno plyne, že f je konvexní na $(-\infty, b)$.

Příklad 4 (25 bodů)

Soustavu $A_p\mathbf{x} = \mathbf{b}$ upravíme elementárními řádkovými úpravami na odstupňovaný tvar.

$$(A_p|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & p+2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & p+2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+1 & 1 \end{array}\right)$$

- Pro $p = -1$ je dimenze prostoru všech řešení soustavy $A_p\mathbf{x} = \mathbf{o}$ rovná 3. Bázi tohoto prostoru získáme například volbami $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$ hodnot volných proměnných a dopočtením bázových proměnných. Uvedené volby dávají bázi

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) .$$

  Pro $p \neq -1$ je dimenze množiny řešení 2, báze je například

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) .$$

- Pro $p = -1$ nemá soustava $A_p\mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešení. Jinak dopočtením partikulárního řešení (například volbou 0 pro hodnoty volných proměnných) získáme množinu všech řešení

$$\begin{pmatrix} 3 - \frac{1}{p+1} \\ 0 \\ 2 - \frac{1}{p+1} \\ 0 \\ \frac{1}{p+1} \end{pmatrix} + \mathrm{LO} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$