Bakalářské zkoušky (příklady otázek z matematiky)

podzim 2021

1 Spojité funkce (3 body)

1. Definujte, co znamená, že funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *spojitá* v bodě $b \in \mathbb{R}$.
2. Pro každou z následujících dvou funkcí rozhodněte (a stručně zdůvodněte), zda je spojitá v bodě 0.

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{pro } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0 \\ \exp(-1/x) & \text{pro } x \neq 0. \end{cases}$$

3. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce splňující $0 \leq f(x) \leq 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[0,1]$, a definujme funkci $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Je funkce g spojitá na intervalu $(0,1)$? Zdůvodněte.

2 Limita posloupnosti (3 body)

1. Napište, jak je definována limita posloupnosti reálných čísel. (Stačí, když se omezíte na případ, kdy limita je vlastní.)
2. Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, která má vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$. Definujme posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ předpisem $b_n = a_n - a_{2n}$. Je možné z těchto informací rozhodnout, zda má $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ limitu, případně čemu se ta limita rovná?
3. Definujme posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ následujícími rovnostmi:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_n &= \sin(c_{n-1}) && \text{pro } n \geq 1. \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda má posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ limitu, případně čemu se ta limita rovná.

3 Primitivní funkce (3 body)

1. Napište definici pojmu *primitivní funkce k funkci f na intervalu* (a,b).
2. O každém z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý, a své rozhodnutí stručně zdůvodněte.
   (a) Jestliže je funkce f neklesající na intervalu $[a,b]$, tak má na intervalu (a,b) primitivní funkci.
   (b) Jestliže má funkce f na intervalu (a,b) primitivní funkci F, a jestliže má F lokální minimum v bodě $c \in (a,b)$, tak platí $f(c) = 0$.
3. Spočítejte

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{\sin x} \cdot \cos x\,dx.$$

4 Lineární zobrazení (3 body)

1. Definujte pojem *jádro* $Ker(f)$ lineárního zobrazení f mezi vektorovými prostory U a V.
2. Dokažte, že jádro $Ker(f)$ je podprostorem U.
3. Najděte bázi jádra lineárního zobrazení, které představuje druhou derivaci na prostoru reálných polynomů stupně nanejvýše 5.

5 Skalární součin (3 body)

Na prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme standardní a nestandardní skalární součin

$$\langle x, y \rangle = x^T y,$$
$$\langle x, y \rangle_A = x^T A y,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Ověřte, že $\langle x, y \rangle_A$ tvoří skutečně skalární součin (stačí ověřit vlastnost $\langle x, x \rangle_A > 0$ pro každé $x \neq 0$).
2. Najděte lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takové, aby pro každé $x, y \in \mathbb{R}^3$ platilo
$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle_A .$$

6 Podobnost matic (3 body)

Uvažujme matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Definujete pojem *podobnost matic.*
2. Rozhodněte (a zdůvodněte), zda matice A, B jsou podobné.
3. Dokažte $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{4}A)^n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{4}B)^n$.

7 Kombinatorické počítání (3 body)

Kolik lze nalézt různých čtvercových matic řádu 4 nad tělesem $\mathbb{Z}_3$, které obsahují 9 nul, ale žádný řádek ani sloupec nemají zcela zaplněný nulami?

8 Souvislost grafů (3 body)

Pro jednoduchý graf G s alespoň dvěma vrcholy definujte jeho vrcholovou a hranovou souvislost.

Rozhodněte, zda existují grafy s následujícími hodnotami vrcholové a hranové souvislosti. Odpovědi zdůvodněte.

1. $k_v(G_1) = 2, k_e(G_1) = 3$,
2. $k_v(G_2) = 3, k_e(G_2) = 2$,
3. $k_v(G_3) = 2, k_e(G_3) = 3$ a G_3 je kubický (tj. všechny jeho vrcholy mají stupeň 3).

9 Logika (3 body)

1. Uveďte definici (jednu z navzájem ekvivalentních definic), kdy je teorie S *jednoduchou extenzí* teorie T.
2. Nalezněte příklad výrokových teorií S, T_1, T_2 takových, že S je jednoduchou bezespornou extenzí teorie T_1 i teorie T_2 a $T_1 \cup T_2$ je sporná, anebo zdůvodněte, proč takové teorie neexistují.
3. Kolik je navzájem neekvivalentních jednoduchých extenzí S výrokové teorie $T = \{p \to q\}$ nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$, ve kterých neplatí $q \to r$, tj. $S \not\models q \to r$?