Bakalářské zkoušky (příklady otázek z matematiky)

podzim 2020

1 Limita funkce, spojitost a derivace (3 body)

1. Napište definici limity funkce a uveďte příklad ukazující, že následující podmínka (P) *není* ekvivalentní tvrzení, že "funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ má v bodě a limitu L":

$$(P) \qquad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow |a - x| < \delta$$

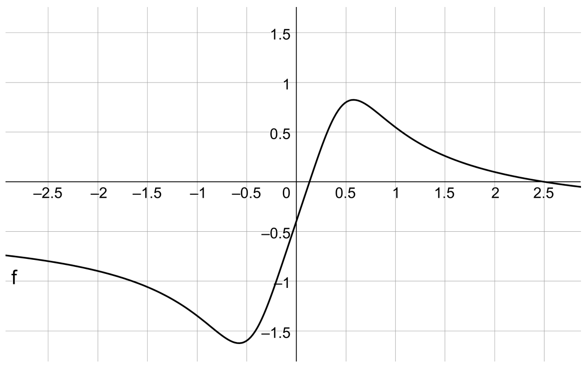
2. Pokud existují, najděte konstanty a a b takové, že funkce f definovaná jako

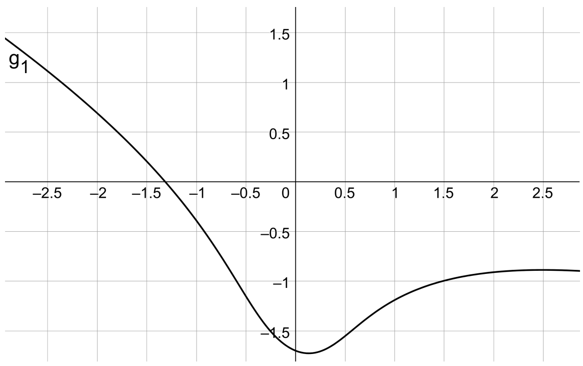
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^2 - 2x^3}{3x^2} & \text{pro všechna } x > 0 \\ x^2 + ax + b & \text{pro všechna } x \leq 0 \end{cases}$$

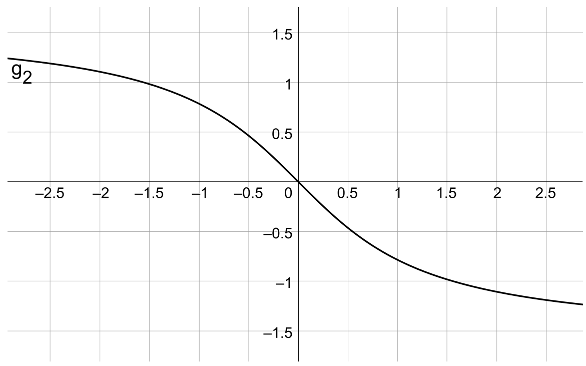
je spojitá a má spojitou první derivaci. Pokud takové konstanty existují, jsou jednoznačně určeny? Zdůvodněte, jak jste k výsledkům došli.

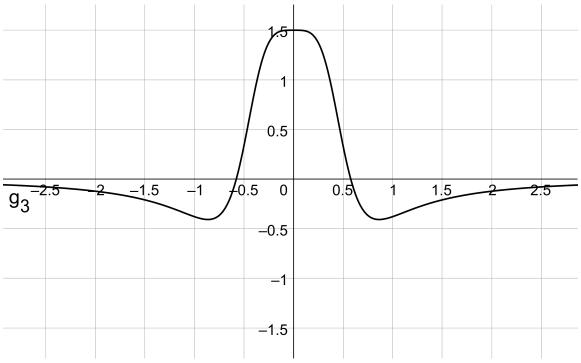
2 Primitivní funkce (3 body)

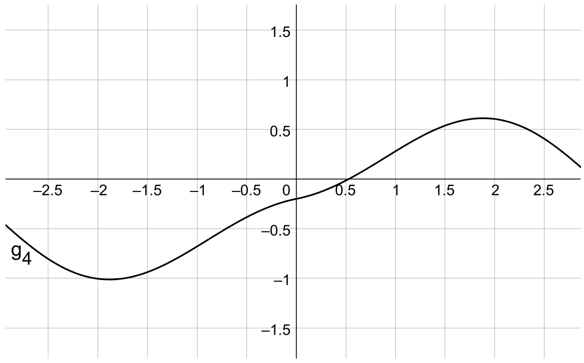
1. Napište definici pojmu "primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b)".
2. Na následujících obrázcích je zobrazen graf funkce f a grafy čtyř dalších funkcí g_1, g_2, g_3 a g_4. Jedna z funkcí g_i je primitivní funkce k funkci f. Určete, která to je, a svou odpověď zdůvodněte.











3. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x^2 \sin x$.

3 Funkce více proměnných (3 body)

1. Definujte totální diferenciál. Pro funkci $f(x, y) = xy$ spočtěte $Df(x, y)(h_1, h_2)$ obvyklou metodou a výsledek poté ověřte podle definice. (Nápověda: pokud $\|(h_1, h_2)\| = c$, pak $|h_1|, |h_2| \leq c$.)
2. Ve kterých bodech je tečná rovina grafu funkce $f(x, y) = 5 + \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$ rovnoběžná s rovinou $z = x + 2y$? Pro jeden z těchto bodů spočtěte rovnici tečné roviny.

4 Vlastní čísla (3 body)

1. Definujte vlastní čísla a vlastní vektory pro komplexní matice.
2. Pro matici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
rozhodněte, zda existuje ortonormální báze $\mathbb{R}^3$ skládající se z vlastních vektorů A. Pokud taková báze existuje, nalezněte ji.

5 Matice rotací (3 body)

Nechť M je množina všech matic v $\mathbb{R}^{2\times 2}$, které jsou maticí rotace kolem počátku v $\mathbb{R}^2$ vzhledem ke kanonické bázi, tj.
$$M = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \exists \text{ rotace } f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ že } A = {}_{kan}[f]_{kan} \right\}.$$
Rozhodněte, zda M tvoří spolu s maticovým součinem grupu.

6 Hallova věta (3 body)

1. Definujte pojem “systém různých reprezentantů (daného množinového systému)” a formulujte Hallovu větu.
2. Nechť f je zobrazení z množiny $\{1, \ldots, 10\}^2$ do nezáporných celých čísel splňující podmínky
$$\forall i \in \{1, \ldots, 10\} \sum_{j=1}^{10} f(i, j) = 5 \ ,$$
$$\forall j \in \{1, \ldots, 10\} \sum_{i=1}^{10} f(i, j) = 5 \ .$$
Ukažte, že potom pro každé $i \in \{1, \ldots, 10\}$ lze vybrat $k(i)$ takové, že $f(i, k(i)) > 0$ a přitom k je prostá funkce.

7 Barevnost grafů (3 body)

Mějme graf G na vrcholech $v_1, \ldots, v_{100}$ takový, že:

- každý vrchol je spojen hranou se svými čtyřmi nejbližšími předchůdci a čtyřmi nejbližšími následníky, a k tomu
- vrcholy s indexem mezi 40 a 60 (včetně) jsou spojeny hranou s dalšími nejbližšími předchůdci a následníky, do celkem sedmi předchůdců a sedmi následníků,
- vrchol s indexem 10 je spojen s vrcholy s indexy mezi 70 a 80 (včetně),
- vrchol s indexem 90 je spojen s vrcholy s indexy mezi 20 a 30 (včetně).

Je-li předchůdců či následníků méně, je vrchol spojen se všemi připadajícími v úvahu.

Formálně:

$$(v_i, v_j) \in E_G \Leftrightarrow i \neq j \wedge \Big[|i-j| \leq 4 \vee \Big(i \in \{40, \ldots, 60\} \wedge |i-j| \leq 7\Big) \vee \Big(i = 10 \wedge j \in \{70, \ldots, 80\}\Big) \vee \Big(i = 90 \wedge j \in \{20, \ldots, 30\}\Big)\Big]$$

Určete barevnost tohoto grafu, případně co nejtěsnější meze barevnosti G.

8 Podmíněná pravděpodobnost (3 body)

Na testování jisté choroby je možno použít dva testy, označme je A a B. Je známo, že chorobou trpí 7% populace, a že u 9% populace vyjde pozitivní alespoň jeden z testů bez ohledu na to, zda testovaný pacient má uvedenou chorobu. Určete pravděpodobnost, že pacient má uvedenou chorobu za předpokladu, že mu alespoň jeden test vyjde pozitivní.

Pokud to vašim úvahám pomůže, můžete využít následující fakta: U klinicky prokazatelně nemocných, u nichž byl testován jen test A, vyšlo 80% pozitivních. Podobně 70% prokazatelně nemocných testovaných jen testem B bylo pozitivních. U nemocných testovaných oběma testy vyšly pozitivní oba testy u 60% osob.

9 Logika (3 body)

1. Uveďte obecný tvar *rezolučního pravidla* ve výrokové logice a definici, kdy je klauzule C *rezolucí odvoditelná* z teorie (tj. množiny klauzulí) S.
2. Následující tři tvrzení vyjádřete jako formule $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ve výrokové logice nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{n, m, p\}$ reprezentujících (po řadě), že "lidé nosí deštníky", "meteorologové hlásí déšť", "prší". Poté teorii $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ zapište jako množinu klauzulí.

   (i) *Neprší-li, lidé nenosí deštníky.*

   (ii) *Hlásí-li meteorologové déšť, lidé nosí deštníky.*

   (iii) *Nehlásí-li meteorologové déšť, prší.*
3. Rezolucí dokažte, že z T vyplývá, že *prší*.