Bakalářské zkoušky (příklady otázek z matematiky)

léto 2021

1 Derivace (3 body)

1. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce a r je reálné číslo. Napište definici derivace funkce f v bodě r.
2. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, která pro každé $x \in \mathbb{R}$ splní $0 \le f(x) \le x^2$. Plyne z těchto předpokladů, že f má v bodě $x = 0$ derivaci? Plyne z těchto předpokladů, že $f'(0) = 0$?
3. Definujme funkci $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

   $$q(x) = \begin{cases} (\sin x)^2 \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

   Má funkce q derivaci v bodě 0, a pokud ano, čemu se rovná?

2 Primitivní funkce (3 body)

1. Napište definici pojmu *primitivní funkce* k funkci f na otevřeném intervalu I.
2. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x^2 \ln x$ na intervalu $(0, +\infty)$, kde $\ln x$ označuje přirozený logaritmus.
3. Nechť k a ℓ jsou nezáporná celá čísla. Uvažme funkci $f_{k,\ell}(x) = x^k (\ln x)^\ell$ definovanou na intervalu $I = (0, +\infty)$. Dokažte, že $f_{k,\ell}$ má na intervalu I primitivní funkci $F_{k,\ell}$. Dokažte dále, že tuto primitivní funkci $F_{k,\ell}$ lze vyjádřit vzorečkem pomocí konstant, funkce x, funkce $\ln x$ a operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a umocňování.

3 Soustavy lineárních rovnic (3 body)

Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Rozhodněte, zda existuje $b \in \mathbb{R}^3$ takové, že soustava $Ax = b$ má právě jedno řešení.
2. Rozhodněte, zda existuje $k \ge 1$ takové, že soustava $(A^k)x = b$ má alespoň jedno řešení pro všechna $b \in \mathbb{R}^3$.

4 Ortogonální projekce (3 body)

Buď $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matice ortogonální projekce na podprostor reálného vektorového prostoru.

1. Zjednodušte výraz $P - P^2 + P^3 - P^4 + \ldots + (-1)^{n+1} P^n$.
2. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí:

   $$\|Px\| = \|x\| \quad \Leftrightarrow \quad Px = x.$$

5 Determinanty matic (3 body)

1. Zformulujte Laplaceův rozvoj determinantu matice $A \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ podle druhého sloupce.

2. Rozhodněte, zda pro čtvercové matice téhož řádu platí

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B).$$

Odpověď zdůvodněte (dokažte nebo uveďte protipříklad).

6 Stromy (3 body)

Nechť $G = (V, E)$ je graf s neprázdnou množinou hran. Rozhodněte, které z následujících podmínek jsou ekvivalentní tomu, že G je strom.

a) G je souvislý a každé dvě kostry G jsou si navzájem izomorfní,

b) G nemá kružnice, minimální stupeň vrcholu je 1 a $|E| > |V| - 2$,

c) G je souvislý a má alespoň dva vrcholy stupně 1 (tzv. listy),

d) G obsahuje nesouvislý podgraf, dokonce každá vlastní podmnožina hran $F \subset E$ tvoří nesouvislý graf (V, F) a přitom mezi každými dvěma vrcholy existuje v G tah,

e) v G neexistuje podmnožina $W \subseteq V$ vrcholů, která by indukovala podgraf s $|W|$ hranami a přitom pro každou neprázdnou $W \subsetneq V$ existuje hrana $\{u, v\}$ mezi W a doplňkem W ve V.

Své rozhodnutí zdůvodněte.

7 Kombinační čísla (3 body)

1. Definujte kombinační číslo (binomický koeficient) a stručně popište Pascalův trojúhelník.

2. Rozhodněte, zdali pro každé přirozené n platí mezi následujícími dvěma výrazy stejná nerovnost a pokud ano, určete jakým směrem.

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{2n-1}{n} \qquad \text{a} \qquad \binom{2n}{n}.$$

Své rozhodnutí zdůvodněte. (Nápověda: zkuste využít vztahů mezi dvěma sousedními čísly v Pascalově trojúhelníku.)

8 Střední hodnota (3 body)

1. Definujte pojem *střední hodnota* reálné náhodné veličiny na konečném pravděpodobnostním prostoru Ω.

2. Mějme běžnou šestistěnnou kostku se stěnami označenými čísly $1, 2 \ldots, 6$, přičemž každé z čísel padne se stejnou pravděpodobností. Určete střední hodnotu náhodné veličiny definované jako druhá mocnina hozeného čísla.

3. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme S_n množinu všech permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pevný bod permutace $q \in S_n$ je takové $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pro které je $q(k) = k$. Určete střední hodnotu počtu pevných bodů v náhodně vybrané permutaci (každá permutace je vybrána se stejnou pravděpodobností).

9 Logika (3 body)

1. Uveďte definici, kdy je teorie T jazyka L_T *jednoduchou kompletní extenzí* teorie S jazyka L_S (v predikátové logice).

2. Nechť $S = \{(\forall x)(\forall y)(\forall z)((U(x) \wedge U(y) \wedge U(z)) \to (x = y \vee y = z \vee x = z))\}$ je teorie jazyka $L = \langle U \rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol. Napište dvě (neekvivalentní) jednoduché kompletní extenze T_1, T_2 teorie S.

3. Zdůvodněte, proč jsou T_1, T_2 kompletní.