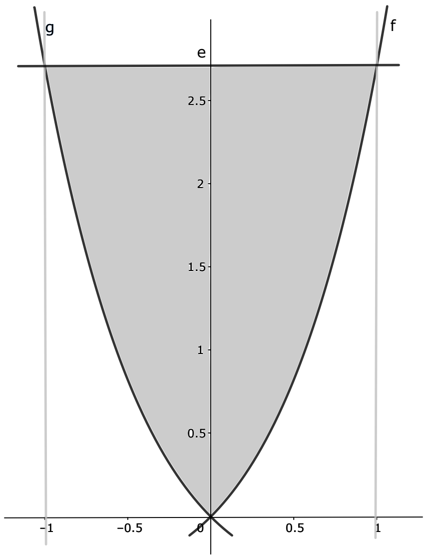
Bakalářské zkoušky (příklady otázek z matematiky)

léto 2020

1 Plocha (3 body)

Nechť $f(x) = xe^x$ a $g(x) = -xe^{-x}$. Spočtěte obsah rovinného útvaru

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x), y \geq g(x), y \leq e\} \ .$$



2 Taylorův polynom (3 body)

1. Nechť $f(x)$ je funkce, která má v bodě $b \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů. Napište vzorec pro Taylorův polynom řádu $n \geq 1$ funkce $f(x)$ se středem v bodě b. Označíme-li tento polynom $T(x)$, co lze říci o hodnotě limity
$$\lim_{x \to b} \frac{f(x) - T(x)}{x^n} \ ?$$
2. Nechť k je přirozené číslo. čemu se rovná Taylorův polynom řádu 2 funkce $f(x) = \cos(kx)$ se středem v nule?
3. S využitím předchozích odpovědí, nebo i jakkoliv jinak, spočítejte hodnotu
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)\cos(2x)\cos(3x)}{x^2} \ .$$

3 Maticové prostory (3 body)

Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

1. Najděte všechny vektory $x \in \mathbb{R}^3$ takové, které náleží do řádkového prostoru matice A a zároveň řeší soustavu $Ax = 0$.
2. Ukažte, že každý vektor $x \in \mathbb{R}^3$ se dá vyjádřit jako součet vektoru z $\mathrm{Ker}(A)$ (jádro matice) a vektoru z $\mathcal{R}(A)$ (řádkový prostor matice).

4 Diagonalizace (3 body)

Uvažujme reálnou matici s parametrem p

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Najděte (alespoň jednu) hodnotu $p \in \mathbb{R}$ takovou, aby matice A byla diagonalizovatelná (v teorii vlastních čísel).
2. Najděte hodnotu $p \in \mathbb{R}$ takovou, aby matice A nebyla diagonalizovatelná (v teorii vlastních čísel).

5 Projekce (3 body)

1. Definujete (ortogonální) projekci vektoru na podprostor.
2. Nechť U, V jsou navzájem ortogonální podprostory nějakého vektorového prostoru (tj. $\forall u \in U, \forall v \in V : u \perp v$). Buď A matice projekce na prostor U a B matice projekce na prostor V. Ukažte, že $A + B$ je maticí projekce a zjistěte, na jaký prostor projektuje.

6 Relace (3 body)

Určete, zda je následující relace $(X, *)$ reflexivní, symetrická, antisymetrická a tranzitivní. Jde-li o ekvivalenci, určete počet tříd ekvivalence; jde-li o částečné uspořádání, určete velikost největšího antiřetězce.

$$X = \{1, \dots, 10\}^2, (a, b) * (c, d) \Leftrightarrow (3 \backslash (a - c) \wedge bd \geq \max\{b, d\})$$

7 2-souvislé grafy (3 body)

Zformulujte „ušaté lemma“ o struktuře vrcholově 2-souvislých grafů.

Ukažte, že hrany každého vrcholově 2-souvislého grafu lze obarvit dvěmi barvami, červenou a modrou tak, že mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta s alespoň jednou modrou hranou a také jiná cesta s alespoň jednou červenou hranou.

8 Střední hodnota (3 body)

1. Definujte pojem “střední hodnota reálné náhodné veličiny na (konečném) pravděpodobnostním prostoru”.
2. Určete střední hodnotu počtu dvojic po sobě následujících stejných výsledků v posloupnosti n hodů spravedlivou mincí. (Např. v posloupnosti RRLLL jsou takové dvojice 3.)

9 Logika (3 body)

1. Uveďte definici, kdy je teorie T jazyka L *kompletní* (pro výrokovou logiku).
2. Nalezněte CNF reprezentaci 3-bitové parity. Přesněji, nalezněte formuli φ v konjunktivně normálním tvaru, která je ekvivalentní formuli
$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3,$$
kde $\oplus$ je (asociativní) spojka XOR (výlučné nebo).
3. Určete, nad jakými jazyky je teorie $\{\varphi\}$ kompletní. Uveďte zdůvodnění.