

# Bakalářské zkoušky (příklady otázek)

léto 2019

## 1 Automaty a gramatiky (3 body)

Nechť  $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, S, P)$  je gramatika s množinou pravidel  $P$ :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid \lambda, \\ A &\rightarrow a, \\ AB &\rightarrow BA, \\ B &\rightarrow ABB \mid b, \end{aligned}$$

kde  $\lambda$  je prázdné slovo.

1. Popište slovně jazyk  $L(G)$ .
2. Zkonstruujte zásobníkový automat přijímající jazyk  $L(G)$ .
3. Dokažte, že jazyk  $L(G)$  není regulární pomocí Nerodovy věty nebo pomocí pumping lemma.

## 2 Algoritmy a datové struktury (3 body)

1. Definujte rozhodovací problémy.
2. Definujte třídy problémů **P** a **NP**.
3. Definujte **NP**-úplnost problému.
4. Uveďte příklad nějakého **NP**-úplného problému. Není to o něm potřeba dokazovat, ale buďte přesní ve formulaci problému.

## 3 Databáze (3 body)

1. Popište sémantiku (chování) operace přirozeného spojení v relační algebře. Jaký bude výsledek přirozeného spojení tabulek  $R(A,B)=((0,1),(1,2))$  a  $S(B,C)=((2,3),(3,4))$ ? Je možné se bez této operace v relační algebře obejít?
2. Je vhodné v databázi podporovat zároveň indexy založené na B-stromu i indexy využívající bitmapy, nebo stačí pouze jedny z nich? Svoji odpověď vysvětlete.
3. Do tabulky  $R(\underline{A},B,C)$  doplňte funkční závislost tak, aby byla porušena druhá normální forma.

## 4 Programování (3 body)

1. Navrhněte objektový model, který umožní reprezentovat školu, která má studenty, učitele a předměty. Předmět má jméno, jednoznačný identifikátor, učitele a lze zjistit seznam zapsaných studentů. Studenti i učitelé mají jméno a jednoznačný identifikátor. U učitele lze zjistit seznam vyučovaných předmětů. U studenta lze zjistit seznam zapsaných předmětů. Pozor, jedna osoba může být zároveň učitelem i studentem (u různých předmětů, nicméně to není nutné nijak kontrolovat).

Respektujte pravidla objektového návrhu (čeká se návrh objektového modelu, tedy v tomto bodě není třeba psát těla metod). Pro návrh použijte Javu nebo C# nebo C++. Drobné syntaktické chyby nebudou při hodnocení otázky uvažovány.

2. Do vašeho návrhu doplňte infrastrukturu (tj. rozšířte rozhraní jednotlivých tříd) potřebnou pro implementaci výpisu do textového souboru v přibližně následujícím formátu:

```
people:
- id: 12345
  name: Alan Doe
- id: 98765
  name: Jane Smith
- id: 34567
  name: John Poe
courses:
- id: NPRG000
  name: Programming
teachers:
- id: 12345
  teaches: NPRG000, NSWI000
- id: 34567
  teaches: NTIN000
students:
- id: 98765
  subscribed: NPRG000, NTIN000
- id: 34567
  subscribed: NPRG000, NSWI000
```

Soustředte se hlavně na hlavičky metod/funkcí; jejich těla mohou být jen naznačena. Pokud vámi použitý jazyk poskytuje konstrukty pro ukládání objektů, můžete je použít, ale není to nutné.

3. Pokud jste ve vašem návrhu modelu použili vícenásobnou dědičnost, velmi stručně načrtněte návrh bez ní. A obráceně, pokud jste nepoužili vícenásobnou dědičnost, načrtněte návrh s ní. (Upozornění, vícenásobnou dědičností se chápá dědění nejen na třídách ale i např. na interfacech resp. jakýchkoliv konstruktech použitého programovacího jazyka, které vícenásobnou dědičnost umožňují). Stručně popište výhody a nevýhody tohoto alternativního návrhu.

## 5 Architektury (3 body)

Na Wikipedii jsme zjistili, že binární obrazový formát souborů `.BMP` začíná následující hlavičkou `FILEHEADER`:

Offset hex	Size	Purpose
00	2 bytes	Identifies the BMP file, and is 0x42 0x4D in hexadecimal, same as BM in ASCII.
02	4 bytes	The size of the BMP file in bytes.
06	2 bytes	Reserved; actual value depends on the application that creates the image.
08	2 bytes	Reserved; actual value depends on the application that creates the image.
0A	4 bytes	The offset of the byte where the bitmap image data (pixel array) can be found.

za kterou v souboru hned následuje druhá hlavička `BITMAPHEADER`:

Offset hex	Size	Purpose
0E	4 bytes	The size of this header.
12	4 bytes	The bitmap width in pixels (signed integer in two's complement).
16	4 bytes	The bitmap height in pixels (signed integer in two's complement).
1A	2 bytes	The number of color planes (must be 1).
1C	2 bytes	The number of bits per pixel, which is the color depth of the image.

Chtěli bychom obrázky ve formátu `.BMP` načítat do naší aplikace, proto nám nejprve pomozte vyřešit následující problémy:

1. Vysvětlete, co obvykle myslíme termínem zarovnání dat (data alignment). Ilustrujte na formátu `.BMP`, zda jsou v jeho zde uvedené části data z pohledu typického počítače zarovnaná či nikoliv.
2. Dočetli jsme se, že v uvedeném formátu `.BMP` jsou všechna data uložena jako little-endian. Vysvětlete, co to znamená.

3. Napište v Javě nebo C# nebo C++ jednoduchý program, který přečte obsah souboru `CoolPicture.bmp` a na standardní výstup vypíše jeho šířku (width) v pixelech jako celé číslo v desítkové soustavě. V programu budete potřebovat funkce pro práci se soubory – zde není nutné, abyste přesně používali existující API, stačí používat nějaké hypotetické (ale rozumné) API.

V odpovědi obecně stačí přibližný zápis kódu (pseudokód), pokud z něj bude přiměřeně jasné, jak by vypadal správný kód v cílovém programovacím jazyce (například není potřeba ukončovat řádky oddělovačem a podobně).

## 6 Sítě (3 body)

Napište sekvenci odeslaných a přijatých zpráv protokolu FTP pro připojení na server `piratsky.server.eu`, stažení binárního souboru `/hide/film.mkv` a odpojení. FTP server je v pasivním režimu, rozsah portů pro datové přenosy je 10000–10999, IP adresa serveru je 195.113.19.222. Hlásíme se jako `anonymous` a místo hesla zasíláme email `muj@tajnymail.edu`.

Vedle základní sekvence FTP zpráv s potřebnými parametry se očekává obecný popis relace, tedy zejména vysvětlení, jakým transportním protokolem a jak se zasílají jednotlivé zprávy. Drobné syntaktické chyby v odpovědi nehrají roli.

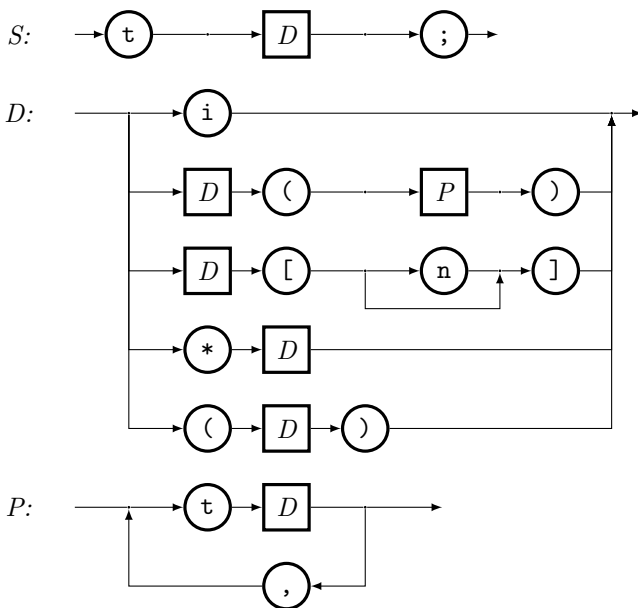
## 7 Optimalizace (3 body)

1. Uvažte lineární program (P) ve tvaru  $\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0$ . Napište, jak bude vypadat duální program (D) k LP (P). Formulujte a dokažte slabou větu o dualitě pro dvojici lineárních programů (P) a (D).
2. Je dán orientovaný graf  $G = (V, E)$ , s vrcholy  $V = \{s, a, b, t\}$ , hranami  $E = \{(s, a), (s, b), (a, b), (b, a), (a, t), (b, t)\}$  a s následujícími kapacitami hran:  $c(s, a) = 1, c(s, b) = 4, c(a, b) = 2, c(b, a) = 2, c(a, t) = 3, c(b, t) = 2$ .

Formulujte úlohu nalezení maximálního toku v grafu  $G$  s kapacitami  $c$  z vrcholu  $s$  do vrcholu  $t$  jako lineární program. Pomocí slabé věty o dualitě použité na Váš lineární program dokažte, že velikost maximálního toku není více než 6.

## 8 Překladače (3 body)

Syntaxe jazyka  $L$  je definována těmito diagramy:



Symbolsy v kroužcích jsou terminály, ve čtvercích neterminály, počáteční neterminál je  $S$ . Definice jazyka kromě těchto diagramů obsahuje i následující odstavec:

Suffixové operátory  $D(P)$ ,  $D[n]$  a  $D[]$  mají přednost před prefixovým operátorem  $*D$ , závorky  $(D)$  lze použít ke zrušení této přednosti. Řetězec  $t * i [] ;$  má tedy stejný význam jako  $t * (i [] ) ;$ , zatímco řetězec  $t (* i) [] ;$  má význam odlišný.

- Vysvětlíte, proč v definici jazyka musí být uvedený (nebo podobný) odstavec.
- Popište, jak syntaktické diagramy upravit tak, aby uvedený odstavec nebyl nutný. (Při této úpravě nesmí dojít ke změně generovaného jazyka.)
- Přepište takto upravené diagramy do podoby klasické bezkontextové gramatiky (tj. bez větvení a smyček na pravých stranách).

## 9 Kódy (otázka studijního zaměření – 3 body)

Pro přirozené  $n$  uvažme binární kód  $C$  obsahující všechna slova  $(x_1, \dots, x_{3n})$  délky  $3n$  s vlastností  $x_{3i-2} = x_{3i-1} = x_{3i}$  pro všechna  $i = 1, 2, \dots, n$ , tedy

$$C = \{(x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, x_2, \dots, x_n, x_n, x_n) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n\}.$$

Určete parametry kódu  $C$  a rozhodněte, zda je lineární a perfektní (v závislosti na parametru  $n$ ). Odpovědi zdůvodněte.

## 10 Dobré uspořádání (otázka studijního zaměření – 3 body)

1. Napište definici dobrého uspořádání (pojem uspořádání definovat nemusíte).
2. Je každé dobré uspořádání lineární? Je každé lineární uspořádání dobré? Krátce zdůvodněte.
3. Napište znění tvrzení o dobrých uspořádáních, které je ekvivalentní s axiomem výběru.

## 11 Barevnost grafů (otázka studijního zaměření – 3 body)

1. Napište definici vrcholové a hranové barevnosti grafu.
2. Najděte všechna přirozená čísla  $k$ , pro něž existuje graf, jehož hranová barevnost je rovna 5 a vrcholová barevnost je rovna  $k$ .

## 12 Základní formalismy pro popis přirozených jazyků (otázka studijního zaměření – 3 body)

Základní datové typy:

1. Popište dva základní datové typy používané pro zachycení syntaxe přirozených jazyků, závislostní a složkové stromy.
2. Uveďte výhody a nevýhody obou z nich.
3. Popište problém neprojektivních konstrukcí a vysvětlíte, jak se tyto konstrukce dají, příp. nedají popsat těmito dvěma typy stromů.

## 13 Morfologická, syntaktická a sémantická analýza přirozeného jazyka (otázka studijního zaměření – 3 body)

Lexikální sémantika:

1. Popište, jakými metodami můžeme popsat lexikální sémantiku jednotlivých slov přirozeného jazyka.
2. Podrobněji popište nejrozšířenější sémantické sítě a jejich kladné i záporné vlastnosti.

3. Uveďte aplikační oblasti, ve kterých sémantické sítě můžeme úspěšně použít.

## 14 Základy teorie informace (otázka studijního zaměření – 3 body)

Házíme třemi poctivými mincemi. Pro každou z nich platí, že pravděpodobnost, že padne panna, je  $1/2$ . Výsledek hodu reprezentujeme jako hodnotu náhodné veličiny  $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ , kde  $x_i \in \{P, O\}$ .

1. Vypočítejte entropii rozdělení této náhodné veličiny.
2. Jak se entropie změní, jestliže právě jedna ze tří mincí bude falešná a padne na ní vždy panna?

## 15 Fourierova transformace (otázka studijního zaměření – 3 body)

1. Definujte (napište vzorec a popište veličiny) 2D Diskrétní Fourierovu transformaci (DFT).
2. Jak se používá DFT na odstranění šumu v obrazech?
3. U obrázků na následující straně správně přiřaďte obraz a jeho DFT.

## 16 Anti-aliasing (otázka studijního zaměření – 3 body)

1. Který z parametrů rastrového zobrazovacího zařízení je anti-aliasingem vylepšen? Jak se to pozná na výsledném obrázku?
2. Jak se může anti-aliasing implementovat v klasickém rastrovém vykreslování (rasterizace, např. při kreslení vektorové grafiky)?
3. Jak se anti-aliasing implementuje v prostředí paprskového zobrazovače (např. ray-tracing)?

## 17 3D scéna pro kreslení na GPU (otázka studijního zaměření – 3 body)

1. Jak byste v paměti počítače reprezentovali 3D scénu, která se pak bude v reálném čase vykreslovat na grafické kartě (GPU)? Nemusíte psát přímo deklarace dat, ale popište dostatečně podrobně svůj návrh slovy.
2. Uvažujte systém hierarchické reprezentace tak, aby se komponenty (objekty, modely) daly jednoduše ve scéně opakovat bez toho, aby se musela data duplikovat.
3. Jak technicky implementovat animaci (pohyb) jednotlivých objektů ve scéně? Omezte se na nedeformovatelná tělesa (“rigid body animation”), která se jen ve scéně přemisťují otáčením a translací.

## 18 Adresace (otázka studijního zaměření – 3 body)

Původně se zdálo, že IPv4 adresy a systém přidělování IPv4 adresových bloků bude stačit na velmi dlouho. Nicméně počty počítačů připojených do internetu strmě stoupaly, až nakonec IPv4 adresy začaly docházet. Popište stručně aspoň tři různé techniky, které oddálily vyčerpání IPv4 adresového prostoru.

## 19 BSD sockety (otázka studijního zaměření – 3 body)

Součástí popisu každé síťové služby je adresa a port serveru udávající koncový bod, kde je služba provozována. V BSD socket API je tento koncový bod reprezentován právě socketem. Pokud je k serveru připojeno více klientů, server má ale pro každého klienta vlastní socket, což neodpovídá dobře adresaci služby s udáním jednoho portu. Vysvětlete, jak toto BSD socket API řeší a napište schematicky (pomocí BSD socketů) kostru TCP serveru.

## 20 Firewall (otázka studijního zaměření – 3 body)

Popište stručně možnosti a omezení různých druhů firewallů (bezstavový filtr, stavový filtr, aplikační firewall).

## 21 Synchronizace na multiprocesech (otázka studijního zaměření – 3 body)

1. Následující implementace zámku (spinlock) může na multiprocetorovém systému selhat. Vysvětlete proč.

```
void lock (bool *l) {
    bool prev;
    do {
        disable_interrupts ();
        prev = *l;
        *l = true;
        enable_interrupts ();
    } while (prev);
}

void unlock (bool *l) {
    *l = false;
}
```

2. Navrhnete úpravu uvedené implementace zámku tak, aby fungovala i na multiprocetorovém systému. Vysvětlete, jak bude tato úprava fungovat na úrovni instrukcí procesoru (pokud použijete nějaké synchronizační prostředky programovacího jazyka, vysvětlete, jak tyto prostředky bude realizovat procesor).

Zadání používá kód v jazyce C, v odpovědi však stačí přibližný zápis (pseudokód), pokud z něj bude přiměřeně jasné, jak by vypadal správný kód v jazyce C (například není potřeba deklarovat proměnné zjevných typů, ukončovat řádky oddělovačem, používat direktivy #include a podobně).

## 22 Interní struktura systémů souborů (otázka studijního zaměření – 3 body)

Předpokládejte soubor, jehož obsah je uložený v 16 blocích systému souborů. Tyto bloky mají po řadě čísla 8, 3, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 96, 97, 98, 99, 33, 32, 31, 30.

1. Načrtněte, jak bude informace o pozici těchto bloků reprezentovaná ve FAT tabulce a jak v inode se seznamem bloků (předpokládejte, že inode byl dimenzován na uložení 12 přímých odkazů na bloky).
2. Je efektivita (ve smyslu prostorových nároků) uložení informace o pozici bloků souboru ve FAT tabulce nebo v inode se seznamem bloků závislá na tom, ve kterých konkrétních blocích je soubor uložený a proč ?
3. Znáte nějaký systém souborů, který by informaci o této konkrétní pozici bloků uschoval prostorově úsporněji ? Pokud ano, jak ? Pokud ne, co tomu brání ?

## 23 Princip mechanismu RPC (otázka studijního zaměření – 3 body)

Mechanismus volání vzdálených procedur (RPC) může používat zvláštní jazyk pro popis rozhraní těchto procedur. Příklad popisu rozhraní v technologii gRPC následuje.

```
syntax = "proto3";
package example;
message AnExampleMessage {
    uint32 some_integer = 1;
    string some_string = 8;
}
service AnExampleService {
    rpc DoSomething (AnExampleMessage) returns (AnExampleMessage) { }
```

1. Vysvětlete roli jednotlivých částí popisu z příkladu (ideálně co nejvíce).
2. Popisu z příkladu se používá ke generování kódu. Vysvětlete, jaký kód se z popisu generuje a jakou hraje roli v mechanismu RPC. Načrtněte, jak takový generovaný kód může v hlavních krocích vypadat (pseudokód).
3. Navrhněte, jakým způsobem by měl server používat vlákna, pokud chceme, aby více klientů mohlo volat server současně a jejich požadavky se navzájem neblokovaly. Mechanismus popište v dostatečném detailu (tedy kdy jaké vlákno vzniká a zaniká a kdy a na co čeká).

## 24 Dvofázové zamykání (otázka studijního zaměření – 3 body)

1. Vysvětlete stručně princip dvofázového zamykání a jeho vztah k izolaci transakcí.
2. Uvažme následující dvě transakce, které běží paralelně, přičemž nevíme, v jakém pořadí jsou operace zpracovány databázovým systémem.

```
T1: B U(X) U(Y) U(Z) C
T2: B U(Z) U(X) C
```

B označuje zahájení transakce, U(X) je SQL příkaz UPDATE modifikující data X a C je COMMIT. Dále víme, že DB systém používá striktní dvofázové zamykání. Rozhodněte, zda obě transakce proběhnou v pořádku bez ohledu na konkrétní rozvrh, nebo zda může pro některé přípustné rozvrhy dojít k potížím (a jakým). Vaši odpověď stručně zdůvodněte.

3. Jaká opatření může přijmout programátor, aby zajistil, že všechny transakce, které používá ve své aplikaci, provedou vždy v pořádku commit, bez ohledu na jejich možné souběhy?

## 25 CSS (otázka studijního zaměření – 3 body)

1. Vysvětlete pojem *CSS selector* a jeho význam.
2. Uveďte (a stručně vysvětlete) 3 základní typy selektorů a alespoň 3 způsoby skládání základních selektorů do složitějších konstrukcí.
3. Vysvětlete algoritmus skládání CSS stylů (jde nám především o určení priorit selektorů a jejich vztah k `!important`). Pro jednoduchost nám stačí skládání stylů, které poskytl autor webové stránky v jednom CSS souboru.

## 26 Front controller (otázka studijního zaměření – 3 body)

Mějme webovou aplikaci, jejíž serverová část používá návrhové vzory Front Controller a Model-View-Presenter. Web server je nakonfigurován tak, že všechny nestatické HTTP požadavky směřuje na bootstrap script `index.php`, a URL přepisuje do podoby `index.php?presenter=<název prezenteru>&action=<identifikátor akce>&...`. Každý prezenter je třída, jejíž identifikátor je název prezenteru se suffixem `Presenter`, a která dědí od třídy `BasePresenter`. Třídy prezenterů jsou v samostatných souborech v adresáři `presenters`, přičemž jméno každého souboru odpovídá přesně jménu třídy prezenteru, pouze je doplněno o příponu `.php`. Každá akce je pak reprezentována metodou prezenteru s prefixem `action`.

Pokud tedy aplikace zpracovává např. URL `index.php?presenter=Login&action=Default`, zavolá se metoda `actionDefault` na instanci třídy `LoginPresenter` ze souboru `presenters/LoginPresenter.php`.

Napište algoritmus, který v rámci této aplikace řeší *routing* a *dispatching*. Vaše řešení zapište buď jako fragment PHP kódu (na drobné syntaktické chyby nebude brán zřetel), nebo alespoň dostatečně podrobně jako sekvenci kroků, které se musí provést a co je potřeba k jejich realizaci. V rámci řešení také naznačte, jak byste při dispatchingu předávali parametry HTTP požadavku (z URL i z těla).

## 27 XML (otázka studijního zaměření – 3 body)

Uvažujte seznam prezenčních listin (prezenční listina = záznam o konání akce, např. přednášky, a účasti osob na této akci). Pro každou prezenční listinu v seznamu uvažujeme:

- název akce (text, povinné)

- datum a čas konání akce (povinné)
- adresu místa konání akce sestávající z názvu ulice, čísla popisného a města (vše povinné)
- označení místnosti konání akce (text, nepovinné)
- seznam zúčastněných osob (povinné jméno, nepovinný název organizace/firmy)

Seznam může obsahovat libovolný počet prezenčních listin a může být i prázdný.

Vytvořte XML schéma popisující XML dokumenty pro zápis seznamu prezenčních listin. K XML schématu napište také příklad validního XML dokumentu (s alespoň jednou institucí). Napiště XPath výraz, který z XML dokumentu vybere prezenční listiny z akcí, které se konaly v Ostravě a zúčastnilo se jich alespoň 5 osob.

## 28 Návrhové vzory (otázka studijního zaměření – 3 body)

Stejně jako v předchozí otázce uvažujte seznam prezenčních listin. Uvažujte dvě různé třídy (v libovolném objektovém či objektově orientovaném jazyku – C++, C#, Java, ...) reprezentující služby pro správu seznamu. První třída, T1, nabízí ve svém rozhraní pro zaznamenání účastníka do prezenční listiny metodu `vytvorInstituci-zapisUcastnika`, druhá třída, T2, nabízí metodu `zalozInstituci-vlozOsobu`. Obě mají také různé sady parametrů pro záznam účastníka.

Mějme třídu `Klient`, jejíž implementace umožňuje zaznamenat účastníka na prezenční listinu voláním metody `zapisUcastnika`. Přišel požadavek, aby byla využívána metoda `vlozOsobu` místo metody `zapisUcastnika`. Navrhněte řešení, které má co nejmenší vliv na vnitřní kód uvedených tříd. Dále rozšířte třídu T2 a případně další potřebné třídy tak, aby se k instancí třídy T2 mohly registrovat různí klienti (instance třídy `Klient` i jiných tříd), kteří budou instancí třídy T2 notifikováni v případě změn prezenčních listinách. Klient musí mít možnost se registrovat ke dvěma typům změn: i) jakákoliv změna, ii) změna v datu a čase konání akce.

Pro řešení zvolte vhodné návrhové vzory. Zvolené návrhové vzory pojmenujte. Řešení buď zakreslete v podobě UML diagramu či diagramů nebo zapište v kódu ve zvoleném jazyce.

## 29 Hledání chyb ve zdrojovém kódu (otázka studijního zaměření – 3 body)

Stručně popište běžné postupy hledání chyb ve zdrojovém kódu (základní princip, typický způsob použití). Diskutujte jejich výhody a omezení vzhledem ke schopnosti najít reálné chyby ve zdrojovém kódu velkých programů.

## 30 Vektory (3 body)

1. Buď  $x = (4, 1, 2)^T$ ,  $y = (1, 0, 3)^T$ . Najděte nenulový vektor  $v$  patřící do lineárního obalu vektorů  $x, y$  takový, aby byl kolmý na  $y$ .
2. V předchozím příkladu nechtě  $y = (1, 0, 3)^T$  je pevný, ale  $x$  bude proměnný vektor. Vyjádřete nyní vektor  $v$  předpisem jako funkci proměnné  $x$ .

Protože je tato funkce lineárním zobrazením, najděte matici tohoto lineárního zobrazení vzhledem ke kanonické bázi.

## 31 Grupy (3 body)

Buď  $n \in \mathbb{N}$  pevné a uvažujme množinu  $\mathcal{M}$  matic řádu  $n$  s celočíselnými prvky a determinantem rovným 1. Dokažte, že  $\mathcal{M}$  s maticovým násobením tvoří grupu.

## 32 Matice (3 body)

Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Určete, zda matice  $A, B$ :

1. mají stejný determinant,
2. jsou podobné,
3. jsou maticemi stejné kvadratické formy, ale vzhledem k různým bázím.

### 33 Posloupnosti a limity (3 body)

Nechť  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  je posloupnost reálných čísel a  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Definujte, co znamená, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ .

Nalezněte limity posloupností  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definovaných  $a_n = \frac{n+7}{n^2+9}$  a  $b_n = \frac{2^n+5}{2^n}$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ .

### 34 Totální diferenciál (3 body)

Definujte totální diferenciál. Pro funkci  $f(x, y) = x^2 + y^2$  spočtěte totální diferenciál  $Df(x, y)(h_1, h_2)$  obvyklou metodou a poté ověřte dosažený výsledek podle definice.

### 35 Plocha a objem (3 body)

Pro křivky  $y = x^2 - 2x$  a  $y = x$  určete:

1. Plochu části roviny ohraničenou těmito křivkami.
2. Objem tělesa získaného rotací tohoto útvaru kolem přímky  $y = 4$ .

### 36 Grafy (3 body)

Uveďte definici vrcholové a hranové souvislosti grafu.

Je pro  $k \geq 2$  každý  $k$ -regulární souvislý graf vrcholově 2-souvislý?

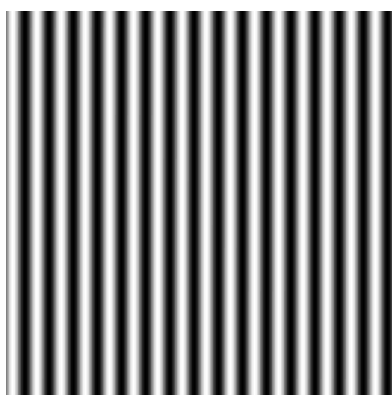
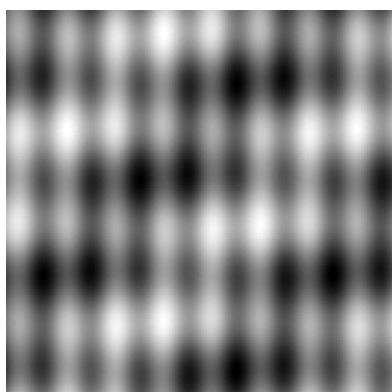
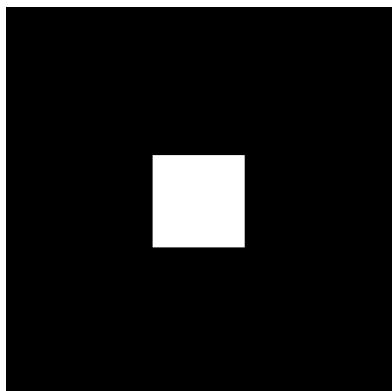
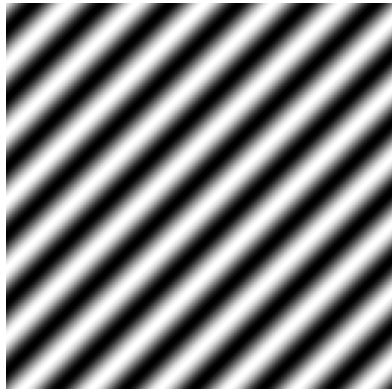
### 37 Konečné projektivní roviny (3 body)

Mějme konečnou projektivní rovinu (KPR) na množině  $\{1, 2, \dots, k\}$ . O této KPR víme, že kromě jiných přímek obsahuje také přímky  $\{1, 2, \dots, 10\}$ ,  $\{10, 11, \dots, 19\}$  a  $\{19, 20, \dots, 27, 1\}$ .

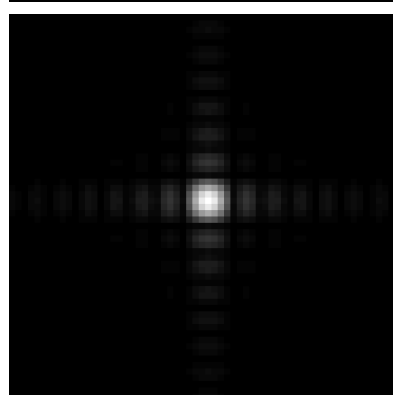
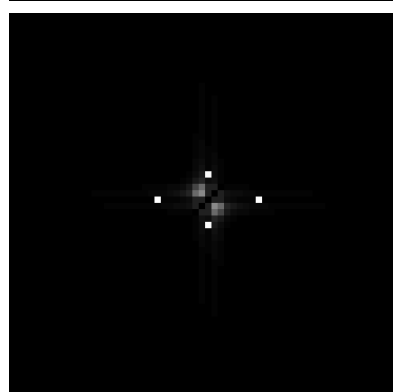
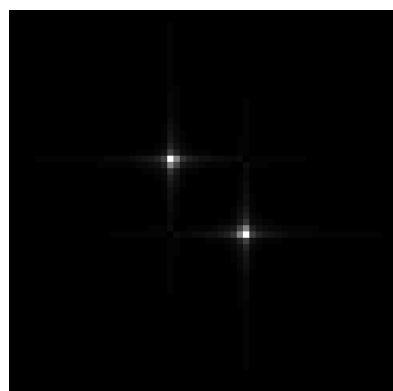
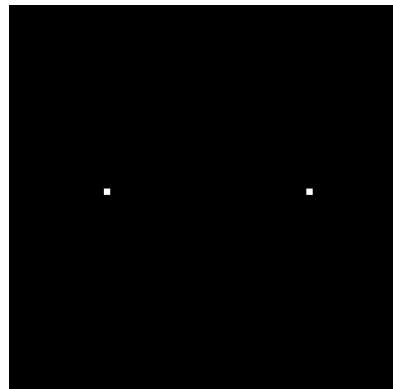
1. Určete hodnotu neznámé  $k$ .
2. Kolik je v této KPR přímek takových, že mají neprázdný průnik s množinou  $M = \{1, 11, 21\}$ ?

### 38 Logika (3 body)

1. Uveďte definici, kdy je formule  $\varphi$  *nezávislá* v teorii  $T$ .
2. Uvažme (výrokovou) teorii  $T = \{p \leftrightarrow \neg(q \rightarrow r), \neg(\neg p \wedge q) \vee \neg r\}$  nad množinou prvovýroků  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ . Určete její modely.
3. Nalezněte příklad formule  $\varphi$  nad  $\mathbb{P}$ , která je nezávislá v předchozí teorii  $T$ , nebo ukažte, že taková formule neexistuje.



Obrázek 1: Originální obraz



Obrázek 2: DFT zoom