Bakalářské zkoušky (příklady otázek z matematiky)

jaro 2020

1 Řady (3 body)

1. Definujte konvergenci řady.
2. Formulujte nutnou podmínku konvergence řady. Uveďte příklad řady, která nutnou podmínku splňuje, ale není konvergentní.
3. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ a své rozhodnutí zdůvodněte.

2 Derivace (3 body)

1. Definujte derivaci funkce v bodě. Z definice odvoďte derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ v bodě $a \neq 0$.
2. Rozhodněte o pravdivosti následujícího tvrzení a své rozhodnutí zdůvodněte: Pokud je f spojitá v bodě 1, má v bodě 1 vlastní derivaci.
3. Spočtěte derivaci funkce $\sqrt[x]{x}$.

3 Funkce více proměnných (3 body)

1. Definujte Hessovu matici a uveďte větu o tom, jak souvisí s lokálními extrémy funkce více proměnných.
2. Najděte všechny lokální extrémy funkce $f(x, y) = -y^2 + \sin x$ a určete, zda se jedná o maxima či minima.

4 Pozitivně definitní matice (3 body)

Definujte pozitivně definitní matice a popište dvě metody pro testování pozitivní definitnosti.

5 Maticové prostory (3 body)

Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

najděte bázi průniku podprostorů U a V, kde

- U je definován jako ortogonální doplněk jádra matice A a
- V je definován jako sloupcový prostor matice A^T.

6 Matice lineárních zobrazení (3 body)

Rozhodněte a zdůvodněte, zda následující matice jsou identické:

- matice otočení o 90 stupňů proti směru hodinových ručiček v $\mathbb{R}^2$ vzhledem ke kanonické bázi a
- matice přechodu od báze $B_1 = \{1, x\}$ k bázi $B_2 = \{-x, 1\}$ prostoru reálných lineárních funkcí jedné proměnné.

7 Kombinatorické počítání (3 body)

Nechť A a B jsou disjunktní množiny přirozených čísel takové, že $|A| = 10$, $|B| = 15$. Kolik existuje uspořádaných sedmic $(x_1, x_2, \ldots, x_7)$ takových, že:

- $|\{x_1, x_2, \ldots, x_7\} \cap (A \cup B)| = 7$
- $|\{x_1, x_2, \ldots, x_7\} \cap A| = 3$
- $x_i \in B \wedge x_j \in B \wedge i < j \Rightarrow x_i < x_j$

(Neboli v každé sedmici je sedm různých čísel, z toho tři z A, a čísla z B jsou vzestupně uspořádána.)

8 Kostry grafů (3 body)

1. Definujte kostru grafu.
2. Kolik koster má K_n, úplný graf na n vrcholech?
3. Nalezněte dva neizomorfní grafy se stejným počtem hran i vrcholů, oba s právě 6 kostrami.

9 Logika (3 body)

1. Uveďte definice, kdy je teorie T_1 jazyka L_1 *extenzí* teorie T_2 jazyka L_2, a kdy jsou T_1, T_2 *ekvivalentní.*
2. Uvažme následující tři teorie ve výrokové logice. Uveďte všechny dvojice z nich, ve kterých je první teorie extenzí druhé. Ukažte, proč tomu tak je.
   - $T_1 = \{\neg p \vee \neg q\}$ jazyka $\{p, q\}$,
   - $T_2 = \{p \leftrightarrow \neg q\}$ jazyka $\{p, q\}$,
   - $T_3 = \{\neg(\neg p \leftrightarrow q) \to r,\ r \leftrightarrow p \vee q\}$ jazyka $\{p, q, r\}$.
3. Určete, kolik je navzájem neekvivalentních extenzí nad $\{p, q, r\}$ teorie $T_1 \cup T_3$. Uveďte zdůvodnění.